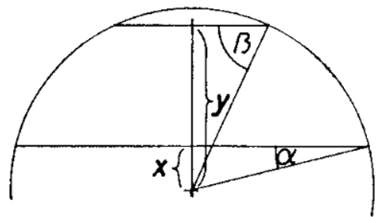
Válasszuk egységnek a gömb sugarát, és jelöljük a csonkakúpot határoló síkoknak a gömb középpontjától mért távolságát x-szel, illetve y-nal. Mivel a csonkakúpot félgömbbe írtuk, a középpont nem lehet a két sík között. Válasszuk úgy a betűzést, hogy $x < y$ teljesüljön, és legyen továbbá $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$. Akkor a csonkakúpot határoló körlapok sugara $\cos\alpha$, $\cos\beta$, a palást alkotója $2\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, és a csonkakúp felszíne

$$F = \pi\left[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2(\cos\alpha + \cos\beta)\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right].$$



Rögzített β mellett ez α-ban monoton fogy, tehát $\alpha = 0$ mellett maximális. Ezt behelyettesítve, és a kapott függvényt β szerint deriválva az

$$f(\beta) = -2\cos\beta\sin\beta - 2\sin\beta\sin\frac{\beta}{2} + (1+\cos\beta)\cos\frac{\beta}{2}$$

függvényt kapjuk (a π konstanst elhagytuk). Ebből némi átalakítás után az

$$f(\beta) = 2\left(4\sin^3\frac{\beta}{2} - 3\sin^2\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\beta}{2} + 1\right)\cos\frac{\beta}{2}$$

alak adódik. Mivel itt a zárójelben álló kifejezés együtthatóinak összege 0, ebből $\left(\sin\dfrac{\beta}{2} - 1\right)$ kiemelhető:

$$f(\beta) = 2\left(4\sin^2\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{\beta}{2} - 1\right)\cos\frac{\beta}{2}.$$

A kapott másodfokú kifejezés gyökei $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{8}$, közülük $\sin\dfrac{\beta}{2} > 0$ miatt csak

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{8}$$

jöhet szóba. Itt a másodfokú kifejezés előjele negatívból pozitívvá válik, $\sin\dfrac{\beta}{2} < 1$, $\cos\dfrac{\beta}{2} > 0$ miatt $f(\beta)$ értéke pedig éppen fordítva, pozitívból vált negatívba. Emiatt annak a függvénynek, amelyiknek $f(\beta)$ a deriváltja, ezen a helyen maximuma van, és a szóba jöhető $0 < \beta < 90°$ értékek mellett ez az egyetlen szélsőérték. Tehát az egységnyi sugarú félgömbbe írható maximális felszínű csonkakúp egyik határolólapja azonos a félgömböt határoló körlappal, a másik attól

$$y = \sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 0{,}7188$$

távolságra van.

Megjegyzés. Megoldásunkban két fontos deriválási szabályt is felhasználtunk, amelyek a használatban levő függvénytáblázatban ugyan megtalálhatóak, de a tankönyvben nem. Az egyik szerint a sin függvény deriváltja a cos függvény, a másik szerint a deriválható u és v függvények szorzata is deriválható, és a derivált $(u'v + uv')$, ahol u', v' szokás szerint u és v deriváltját jelöli. Mivel

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

és $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, valóban igaz, hogy

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(\beta+\varepsilon) - \sin\beta}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\dfrac{\varepsilon}{2}}{\dfrac{\varepsilon}{2}}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\cos\left(\beta + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \cos\beta.$$

A szorzatra vonatkozó állítás pedig a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(x+\varepsilon)\cdot v(x+\varepsilon)-u(x)\cdot v(x)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(x+\varepsilon)-u(x)}{\varepsilon} v(x+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0} u(x)\frac{v(x+\varepsilon)-v(x)}{\varepsilon}$$

átalakítás segítségével igazolható.