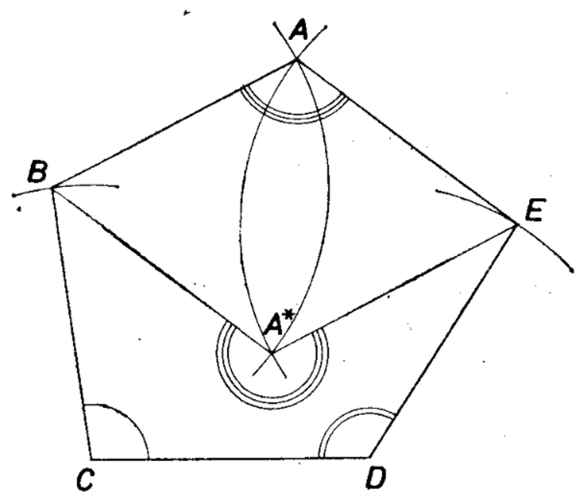
Kövessük az ötszög szerkesztését a jobb oldalon szereplő C, D szögekből. Az oldalak közös hosszát választjuk egységnek. Bármelyik három egymás utáni csúcs egyenlő szárú háromszöget határoz meg, és ennek alapja az ötszög egyik átlója, így pl.

$$BD = 2\sin\frac{C}{2},$$
$$BD^2 = 4\sin^2\frac{C}{2} = 2 - 2\cos C.$$



1. ábra

A BDE háromszögből a cosinustétel alapján

$$BE^2 = BD^2 + DE^2 - 2BD\cdot DE\cos BDE\sphericalangle,$$

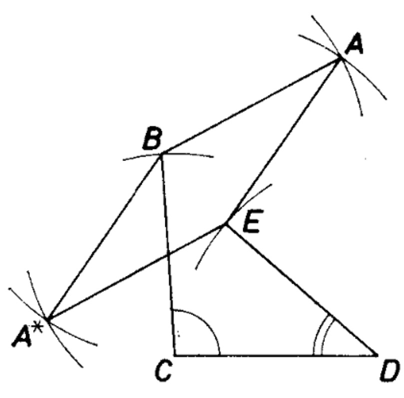
és amennyiben a BD egyenes szétválasztja a C, E csúcsokat (1. ábra):

$$BDE\sphericalangle = D\sphericalangle - BDC\sphericalangle = D - \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = D + \frac{C}{2} - 90^\circ,$$

(2) $$BE^2 = 3 - 2\cos C - 4\sin\frac{C}{2}\sin\left(D + \frac{C}{2}\right),$$

majd a $2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ azonosság fölhasználásával

(3) $$BE^2 = 3 - 2\cos C - 2\cos D + 2\cos(C+D).$$



2. ábra

Ugyanerre a kifejezésre jutunk akkor is, ha E a BD-nek C-t tartalmazó partján van, mert bár ekkor hasonlóan (2. ábra)

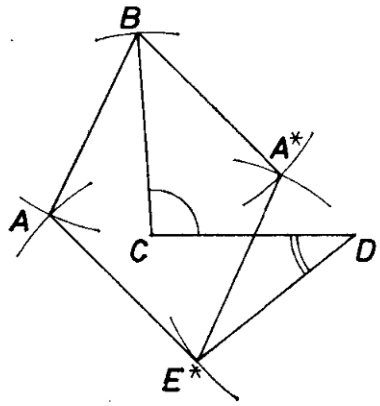
$$BDE\sphericalangle = BDC\sphericalangle - D\sphericalangle = 90^\circ - \left(D + \frac{C}{2}\right),$$

de ennek cosinusa egyenlő az előbbiével.

Másfelől a BAE háromszögből

$$BE^2 = 2 - 2\cos A, \tag{4}$$

és a (3), (4) egyenlőségből rendezéssel megkapjuk a bizonyítandó állítást.

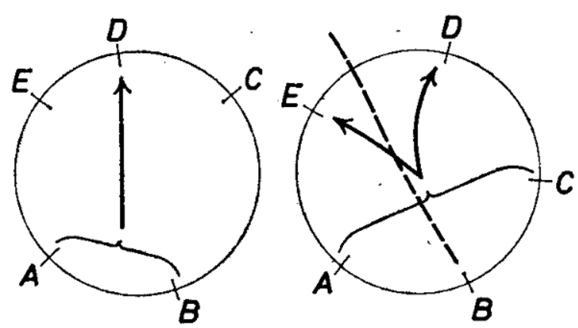


3. ábra

Az utóbbi lépésben nem néztük, hogyan esik a BE egyeneshez képest az A és D csúcs, mert bár az 1. ábra A^* pontjában – amelyre ugyancsak $A^*B = A^*E = 1$ – konkáv szöge van az A^*BCDE ötszögnek, de arra is $\cos A^* = \cos(360° - A) = \cos A$.

Megjegyezzük, hogy (1) akkor is érvényes, ha a jobb oldalán szereplő C és D valamelyikénél van 180°-nál nagyobb szög, és ekkor is adódhat egyszerűen konkáv idom, mint a 3. ábrán $ABCDE^*$ (ahol $\cos C$ és $\cos D$ ugyanaz, mint a 2. ábrán). Azonban nem kívánunk belebonyolódni a hurkolt A^*BCDE^* idomok elemzésébe, hogy melyik az idom belseje, hogyan volnának a belső szögek az egymás utáni C-nél és D-nél stb.

Számpéldánk előkészítéseül kimondjuk: az eredeti alakjában (1) arra alkalmas, hogy az egyenlő oldalú ötszög két szomszédos szögéből kiszámíthassuk a velük szemben levő szöget (ti. amelyik egyikükkel sem szomszédos), a 4. ábra első sémája szerint A-ból és B-ből D-t.



4. ábra

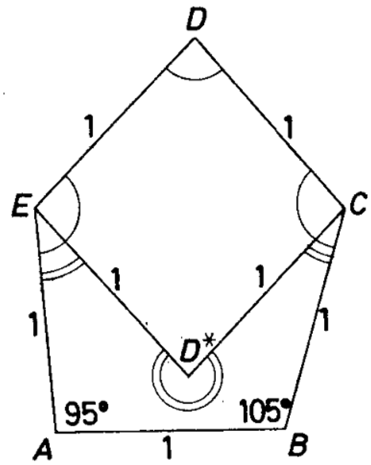
Fölírhattuk volna azonban (2) és (4) egyenlőségét is, és ebből a

$$\sin\left(D + \frac{C}{2}\right) = \frac{1 + 2\cos A - 2\cos C}{4\sin\dfrac{C}{2}} \tag{5}$$

alak a feladat megfordítására alkalmas: két nem szomszédos ismert szögből annak a kettőnek a kiszámítására, amelyek szemben vannak a két ismert közti szöggel. A második sémán a közbülső B-vel E is szemben van és (5)-ben egyrészt A és C, másrészt D és E fölcserélésével

$$\sin\left(E + \frac{A}{2}\right) = \frac{1 + 2\cos C - 2\cos A}{4\sin\dfrac{A}{2}}$$

(tükrözés a második séma B-n átmenő „tengelyére”).



5. ábra

Most már $A=95^\circ$ és $B=105^\circ$ alapján (5. ábra, mérethű) $\cos D=\cos D^*=\cos A+\cos B-\cos(A+B)-0{,}5=+0{,}0937$, amiből $D=84^\circ\,37'$, $D^*=275^\circ\,23'$. Továbbá

$$\sin\left(C+\frac{D}{2}\right)=\frac{1+2\cos A-2\cos D}{4\sin\dfrac{D}{2}}=$$

$$=\frac{1-\cos B+\cos(A+B)}{\sqrt{3-2\cos A-2\cos B+2\cos(A+B)}}=0{,}2371,$$

ehhez az ábra szemléletére támaszkodva a $C+\dfrac{D}{2}=166^\circ\,17'$ értéket vesszük, és így $C=123^\circ\,59'$. Végül ugyanígy

$$\sin\left(E+\frac{D}{2}\right)=\frac{1-\cos A+\cos(A+B)}{\sqrt{3-2\cos A-2\cos B+2\cos(A+B)}}=0{,}1096,$$

$$E+\frac{D}{2}=173^\circ\,43',\qquad E=131^\circ\,24'.$$

Átalakításaink szerint a C, D, E szögeket egymástól függetlenül, közvetlenül az adatokból számítottuk; az eredményekre teljesül $C+D+E=340^\circ=540^\circ-(A+B)$.

A konkáv esetre úgy kapjuk C-ből és E-ből C^*, E^* értékét, hogy levonjuk belőlük a $CDED^*$ rombusz alapján $(180^\circ-D)$-t: $C^*=28^\circ\,36'$, $E^*=36^\circ\,1'$.