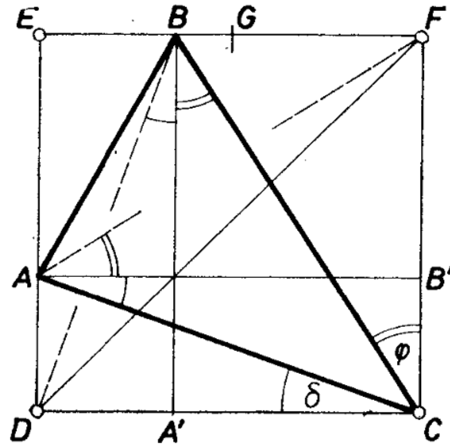
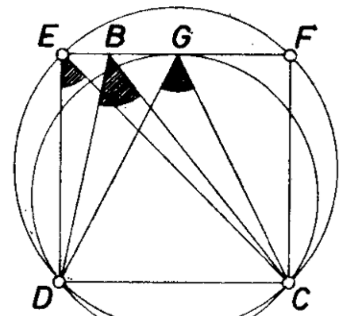
A vizsgált háromszög benne van a $C(r,\,p)$, $D(p,\,p)$, $E(p,\,r)$, $F(r,\,r)$ csúcsok által meghatározott négyzetben, mégpedig A a DE, B pedig az EF oldalon helyezkedik el. Jelöljük még a $(q,\,p)$, $(r,\,q)$ koordinátájú pontokat A'-vel, B'-vel, ezek A, B-nek a négyzet DF átlójára vonatkozó tükörképei. Az $AB'CD$ téglalapban $B'AC\sphericalangle = ACD\sphericalangle$, és mivel ez a téglalap egybevágó az $A'BED$ téglalappal, ezek a szögek az $A'BD$ szöggel is egyenlőek:

$$B'AC\sphericalangle = ACD\sphericalangle = A'BD\sphericalangle.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$B'AF\sphericalangle = BCF\ \sphericalangle = A'BC\sphericalangle.$$





Ezek szerint az ABC háromszög C-nél levő γ szöge és a BCD háromszög B-nél levő szöge 90°-ra egészítik ki egymást. Ez utóbbi biztosan nagyobb 45°-nál, hiszen B benne van a négyzet köré írható körben, így B-ből a CD oldal nagyobb szög alatt látszik, mint az E, F csúcsokból. A B-hez tartozó látószög akkor maximális, ha B azonos az EF oldal G felezőpontjával, ami a megengedett $q=\dfrac{1}{2}(p+r)$ esetben fordul elő. Különben ugyanis B a CDG háromszög köré írható körön kívül helyezkedik el, hiszen ez a kör G-ben érinti az EF egyenest. Mivel $\cos CGD\sphericalangle = 0{,}6$, $CGD\sphericalangle = 53{,}13^\circ$, így azt kaptuk, hogy

$$36{,}87^\circ \le \gamma < 45^\circ. \tag{1}$$

Az ABC háromszög B-nél levő β szöge nagyobb a CBD szögnél, hiszen tartalmazza azt. Emiatt $\beta > 45^\circ$ és $\beta+\gamma > 90^\circ$, vagyis az ABC háromszög A-nál levő α szöge kisebb 90°-nál. Mivel α viszont nagyobb az ACF háromszög A-nál levő szögénél, $\alpha > 45^\circ$ és $\alpha+\gamma > 90^\circ$, vagyis $\beta < 90^\circ$. Tehát

$$45^\circ < \alpha,\quad \beta < 90^\circ. \tag{2}$$

II. megoldás. Jelöljük az ACD, BCF szögeket δ-val, φ-vel, ezek tangensét λ-val, μ-vel:

$$\lambda = \operatorname{tg}\delta = \frac{q-p}{r-p},\qquad \mu = \operatorname{tg}\varphi = \frac{r-q}{r-p},$$

vagyis λ, μ pozitívak és $\lambda+\mu=1$. A tangens függvényre vonatkozó addíciós képlet szerint

$$\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}(90^\circ-\gamma) = \operatorname{tg}(\delta+\varphi) = \frac{\lambda+\mu}{1-\lambda\mu},$$

tehát $\operatorname{tg}\gamma = 1-\lambda\mu$. Így $\operatorname{tg}\gamma$ mindenesetre kisebb, mint 1, és a $\lambda+\mu=1$ feltétel miatt $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$ mellett minimális az értéke, amikoris $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{3}{4}$, amiből γ-ra ismét az (1) alatti határokat kapjuk. Ugyancsak az addíciós képlet szerint

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} CAB'\sphericalangle + \operatorname{tg} B'AB\sphericalangle}{1-\operatorname{tg} CAB'\sphericalangle \operatorname{tg} B'AB\sphericalangle} = \frac{\lambda + \dfrac{\mu}{\lambda}}{1-\mu} = 1+\frac{\mu}{\lambda^2},$$

és hasonlóan kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\beta = 1+\dfrac{\lambda}{\mu^2}$. Tehát $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ nagyobb egynél, amiből α-ra és β-ra a (2) alatti határokat kapjuk. Ha λ tart 0-hoz, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ értéke rendre ∞-be, 1-hez, 1-hez tart, tehát α értéke 90°-hoz, β és γ pedig 45°-hoz tart. Ha pedig μ tart 0-hoz, akkor β tart 90°-hoz és α, γ tart 45°-hoz. Eszerint az (1), (2) határok nem javíthatóak.