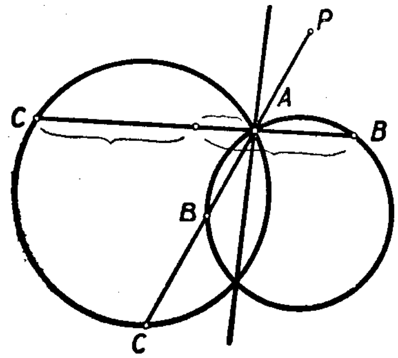
a) Körsorokra vonatkozó feladatok.

1. *Bizonyítsátok be, hogy ha egy P pont nincs rajta két egymást metsző kör hatványvonalán, akkor más lesz a hatványa az egyik és a másik körre nézve.*

Megoldás: Ha a két kör metszi egymást, akkor legyen egyik metszéspontjuk A. Mivel P nincs rajta a két kör közös húrján, sem meghosszabbításán, így a PA egyenes metszi mindegyik kört még egyszer két különböző B és C pontban. Egyikük A-ba is eshet, ha PA érinti az egyik kört.

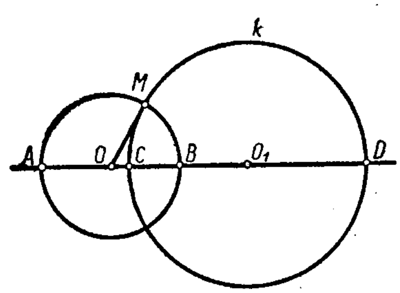


Ha P kívül van a BC közön, akkor $PB \neq PC$ és így $PA \cdot PB \neq PA \cdot PC$. Ha P a B és C pont közt van, akkor lehet $PB = PC$, de akkor P elválasztja például a C pontot A-tól és B-től. Ekkor P az A-n és B-n átmenő körön kívül van, az A-n és C-n átmenőnek viszont a belsejében. Egy belső és egy külső pont hatványára viszont soha sem szoktuk azt mondani, hogy egyenlők. Megkülönböztetésül a belső pont hatványát szokás negatív előjelűnek is venni, annak jelzésére, hogy itt két P-ből ellenkező irányba induló távolság szorzatáról van szó, míg külső pont hatványát a ponttól egyirányba haladó távolságok szorzata adja.

E megoldás kapcsán felvetődik a következő kérdés: Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, melyeknek két metsző körre vonatkozó hatványa ellenkező előjellel egyenlő?

2. *Bizonyítsátok be, hogy az A és B pontokon át írható körsort derékszögben metsző k kör az A, B pontokhoz tartozó egyik Apollonius-kör.*

Megoldás: Tudjuk, hogy az A és B pontokon átmenő körsort derékszögben metsző kör középpontja rajta van a körsor AB hatványvonalán, és megfordítva, ha egy kör, amelynek középpontja az AB egyenesen van a körsor egy körét derékszögben metszi, akkor derékszögben metszi az egész körsort. Így elég azt bizonyítanunk, hogy olyan kör, melynek középpontja az AB egyenesen van, és az AB mint átmérő fölé írt kört (a körsor legkisebb körét) derékszögben metszi, az az A és B pontokhoz tartozó egyik Apollonius-kör. Legyen az A és B ponton átmenő kör középpontja O, és a rá merőleges k köré O_1, ennek metszéspontja a két kör centrálisával C és D, a két kör egyik metszéspontja pedig M.



A k kört érinti az OM egyenes, így

$$OM^2 = OC \cdot OD, \qquad OM = AO,$$

tehát

$$AO^2 = OC \cdot OD,$$

vagy másképp írva:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{AO}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{AO + OC}{AO - OC} = \frac{OD + AO}{OD - AO}$$

és minthogy $AO = OB$

$$\frac{AO + OC}{OB - OC} = \frac{OD + AO}{OD - OB},$$

vagy

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

Tehát valóban a k kör az A, B pontokhoz és a $\lambda = \dfrac{AC}{BC}$ arányhoz tartozó Apollonius-kör.

3. *Jelöljük k-val az A és B pontokon átmenő körsor köreit, az erre ortogonális körsor köreit h-val. Bizonyítsuk be, hogy – az A és B pont kivételével – a síknak minden pontján egy és csakis egy k is h kör megy át.*

Megoldás: *a)* A és B pontokon átmenő körsornak egy tetszőleges P ponton valóban csak egy köre megy át, ugyanis három pont (ha nem fekszik egy egyenesen) egyértelműen meghatároz egy kört. Ha A, B és P egy egyenesen vannak, akkor a hatványvonalat kapjuk, amelyet szintén a körsorhoz tartozónak tekintünk.

b) Mivel az A és B ponton átmenő körsort ortogonálisan metsző körsor elemei az A és B pontokhoz tartozó Apollonius-körök, azért csak azt kell bizonyítani, hogy egy P ponton egy és csakis egy, az A és B pontokhoz tartozó Apollonius-kör megy át. Ez pedig nyilvánvaló, mert $\dfrac{AP}{BP}$ egyértelműen meghatározza az A, B és P pontokhoz tartozó Apollonius-kört. Ha P AB középmerőlegesén van, akkor a körsor keresett eleme ez a középmerőleges, azaz a körsor hatványvonala lesz, amit szintén a körsorhoz számítunk.

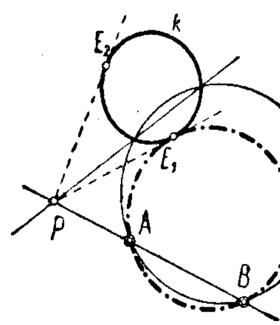
4. *Legyen* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *hat pont jele. Az* 12, 34 *és* 56 *találkozzék egy pontban. Ha* 1234 *és* 3456 *pontok egy-egy húrnégyszög csúcsai, bizonyítsátok be, hogy* 5612 *is húrnégyszöget tűz ki.*

I. Megoldás: Célszerűbb lesz az adott pontokat A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6-tal jelölni. Legyen A_1A_2, A_3A_4 és A_5A_6 metszéspontja A_7. Fektessünk az $A_1A_2A_3A_4$ illetőleg $A_3A_4A_5A_6$ pontokon k_1 ill. k_2 köröket. Rajzoljuk meg az $A_1A_2A_5$ pontokon átmenő k_3 kört. k_1k_2, és k_3 hatványpontja nyilván A_7 lesz. De A_7 lesz a hatványpontja a k_1k_2 és az $A_1A_2A_6$ pontokon átmenő k_3' köröknek is, tehát k_3 és k_3' összeesik, vagyis $A_1A_2A_5A_6$, pontok egy körön vannak. Ha a hat pont nincs egy síkban, akkor a k_1 és k_2 körök sem lehetnek egy síkban. Két közös ponttal rendelkező, nem egy síkban fekvő két kör pedig mindig meghatároz egy és csakis egy gömböt. Ezen van tehát a k_3 kör is.

II. Megoldás: Használjuk az előbbi jelöléseket. Ekkor $A_7A_1 \cdot A_7A_2 = A_7A_3 \cdot A_7A_4$ és $A_7A_3 \cdot A_7A_4 = A_7A_5 \cdot A_7A_6$ tehát $A_7A_1 \cdot A_7A_2 = A_7A_5 \cdot A_7A_6$, vagyis az $A_1A_2A_5A_6$ négyszög húrnégyszög. Ha térben van a hat pont, akkor, mivel $A_7A_1 \cdot A_7A_2 = A_7A_3 \cdot A_7A_4 = A_7A_5 \cdot A_7A_6$, a hat pont köré gömb írható.

5. *Adva van egy k kör és A, B pontok. Szerkesztendő az A, B pontokon átmenő kör, mely a k kört érinti.*

Megoldás: Legyen a keresett kör $k_é$. Két érintkező kör hatványvonala az érintkezési pontjukban húzott érintőjük. Ezt fogjuk először megszerkeszteni. Egy pontját három kör hatványpontja segítségével kaphatjuk meg.



Bár a $k_é$, kört még nem ismerjük, tudunk olyan k_1 segédköröket rajzolni, hogy ismerjük k_1 és $k_é$ hatványvonalát: bármely A-n és B-n átmenő kört véve az AB egyenes lesz ez a hatványvonal. Ha az egyszerűség kedvéért olyan k_1 kört veszünk, mely k-t is metszi, C-ben és D-ben, akkor k és k_1 hatványvonala a C-n és D-n átmenő egyenes. A két egyenes P metszéspontján kell átmennie tehát k és $k_é$ hatványvonalának is. Mivel k és $k_é$ érintkező körök, a P pontból a k körhöz húzott érintők felelnek meg a keresett hatványvonalul. Ezek E_1 ill. E_2 érintési pontja az A és B pontokkal meghatároz egy-egy kört, csak ezek lehetnek a keresett érintő körök.

Meg kell mutatnunk, hogy ezek valóban érintik a k kört. Ezt az A-n, B-n és E_1-en átmenő körről fogjuk megmutatni. Elég azt megmutatni, hogy ez a kör érinti az E_1 pontban a PE_1 egyenest. Ez az egyenes hatványvonala a két körnek, mert a P pontot úgy szerkesztettük, hogy egyenlő legyen a hatványa a k körre és az A-n és B-n átmenő körökre nézve, E_1-nek viszont mindkét körre vonatkozó hatványa 0. Ha a szerkesztett kör még egy pontban metszené a PE_1, egyenest, akkor ennek a pontnak a rá vonatkozó hatványa 0 volna, a k körre vonatkozó hatványa viszont nem 0, mert a PE_1 egyenes az E_1 pontban érinti a k kört. Ez lehetetlen, tehát a szerkesztett körnek is érintenie kell az E_1 pontban a PE_1 egyenest, tehát érinti a k kört is.

6. *Adva van k kör és A, B pontok. Szerkesztendő az A, B pontokon átmenő kör, mely a k kört derékszögben metszi.*

Megoldás: Legyen az adott k kör középpontja O, sugara r. OB-nek a keresett körrel való másik metszése legyen C, akkor $OC \cdot OB = r^2$. Ebből OC megszerkeszthető. Az A, B és C pontok meghatározzák a keresett kört.

7. *Tekintsük egy megadott háromszög oldalait, mint egy-egy kör átmérőjét. A hozzájuk tartozó három kör hatványpontja milyen összefüggésben van a háromszöggel?*

Megoldás: Legyen az adott háromszög ABC_Δ, a BC, CA, illetőleg AB fölé, mint átmérő fölé írt körök k_1, k_2 illetőleg k_3. k_1 és k_2 másik közös pontja P. Nézzük meg először pl., hogy a k_1 és k_2 körök hatványvonala, a CP egyenes milyen összefüggésben van a háromszöggel. Thales tétele szerint $CP \perp AP$ és $CP \perp BP$. Ez csak úgy lehetséges, ha P az AB oldalon van és $CP \perp AB$. Így k_1 és k_2 hatványvonala az ABC_Δ AC oldalhoz tartozó magassága. Ugyanúgy a másik két hatványvonal is a háromszög egy-egy magassága, tehát a három kör hatványpontja a háromszög magassági pontja.