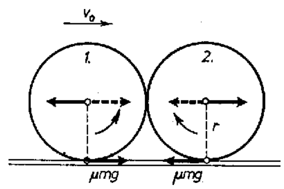
Az 1966. évi Eötvös Loránd fizikai verseny

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1966. október 22-én rendezte fizikai versenyét az 1966-ban érettségizettek számára. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását.

1. *Vízszintes asztallapon álló,* $r = 5$ cm *rádiuszú,* $m = 100$ gramm *tömegű golyónak nekigurítunk* $v_0 = 280$ cm/s *sebességgel egy ugyanilyen golyót. Hogyan folyik le a mozgás? A golyók és az asztallap között a csúszó súrlódási együttható a sebességtől függetlenül* $\mu = 0{,}02$. *Az ütközés rugalmatlan, centrális; a golyók közötti súrlódás és a gördülő ellenállás elhanyagolható.* $g = 1000$ cm/s^2. *Vizsgáljuk meg az energiaviszonyokat.*

Megoldás. Tegyük külön-külön vizsgálat tárgyává a középpontok mozgását és a középpontok körüli forgást. Ütközés előtt az 1. golyó középpontjának v_0, a 2. golyó középpontjának 0 a sebessége. Közvetlenül az igen rövid idejű rugalmatlan ütközés után a sebesség megfeleződik, és mindegyik golyó középpontja $v_0/2$ sebességgel halad tovább. Ami a középpontok körüli forgást illeti, ütközés előtt az első golyó olyan szögsebességgel forog, hogy kerületi pontjának sebessége v_0, hiszen simán gördül, a 2. golyó kerületi pontjának forgási sebessége pedig 0.

Közvetlenül az ütközés után az első golyó kerületi pontja v_0 sebességgel forog, de mivel a középpont csak $v_0/2$ sebességgel halad, a kerületi pont túl gyorsan forog, a golyó köszörül. Ezt fékezi a kerületen működő, előre mutató μmg súrlódási erő (*1. ábra*).



1. ábra

Az 1. golyó középpontjában hozzáveszünk $\pm\mu mg$ erőket. Közülük a bal oldali a súrlódási erővel együtt μmgr forgatónyomatékot ad, amely fékezi a forgást. A fékező szöggyorsulás a forgatónyomaték és I tehetetlenségi nyomaték hányadosa: $\beta = \mu mgr/I$, a kerületi pont lineáris gyorsulása $\beta r = \mu mgr^2/I$. A középponthoz viszonyított forgás kerületi sebessége lassuló mozgást végez, sebessége:

$$v_0 - \frac{\mu g}{I/mr^2} \cdot t. \tag{1}$$

Ami a 2. golyót illeti, itt a μmgr forgatónyomaték gyorsítja a forgást, és a kerületi pont forgási sebessége:

$$\frac{\mu g}{I/mr^2} \cdot t. \tag{2}$$

A szaggatott vonallal rajzolt μmg erők eredője nulla, ezért ezek az erők nem befolyásolják a mozgást. (A golyók közötti súrlódás nulla.)

Az első golyó forgásának lassulása, a második golyó forgásának gyorsulása addig tart, amíg a kerületi pont forgási sebessége $v_0/2$ lesz. Akár (1), akár (2) kifejezést tesszük $v_0/2$-vel egyenlővé, a forgás fékeződésének idejére ugyanazt a

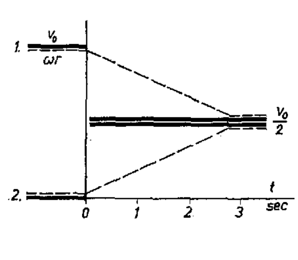
$$t_0 = \frac{v_0}{2\mu g} \cdot \frac{I}{mr^2}$$

időt kapjuk. Ennyi idő elteltével mindegyik golyó kerületi pontja is $v_0/2$ sebességű lesz, és ezután a golyók simán gurulnak tovább.

A 2. ábra a sebességek időbeli alakulását mutatja. A folytonos vonalak a középpontok haladási sebességeit, a szaggatott vonalak a kerületi pontok forgási sebességeit tüntetik fel.Feladatunk számadatait tekintve a forgás lefékeződésének ideje $t_0 = 2{,}8$ s, ezalatt a golyók középpontjai

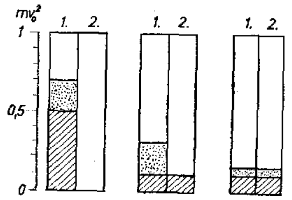
$$s_0 = \frac{v_0}{2} t_0 = \frac{v_0^2}{4\mu g} \cdot \frac{I}{mr^2} = 392 \text{ cm}$$

utat tettek meg. (A gömb tehetetlenségi nyomatéka $I = 0{,}4\,mr^2$.) Sem a lefékeződés ideje, sem útja nem függ a golyók tömegétől és rádiuszától.



2. ábra

Ütközés előtt az 1. golyónak haladó mozgása miatt $0{,}5\,mv_0^2$, forgása miatt $0{,}2\,mv_0^2$ forgási energiája volt, ez összesen $0{,}7\,mv_0^2$. A 2. golyónak semmiféle mozgási energiája sem volt. (3. ábránkon a haladásból származó mozgási energiát vonalkázás, a forgásból származót pontozás jelzi.)



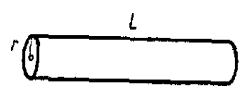
3. ábra

Közvetlenül az ütközés után a sebesség megfeleződése folytán mindegyik golyó haladó mozgása negyedannyi, $0{,}125\,mv_0^2$ mozgási energiát tartalmaz, de az 1. golyónak megvan az összes forgásból származó mozgási energiája. A végső állapotban mindegyik golyó az eredeti forgásból származó mozgási energia negyedének, $0{,}05\,mv_0^2$-nek birtokába jut, és mindegyikük összes mozgási energiája $0{,}175\,mv_0^2$. Tehát amint az a rugalmatlan ütközésnél szokásos, mozgási energia hővé alakul, éspedig mind a haladási, mind a forgási energia fele. A megmaradt félen osztozik a két golyó.

2. *Vákuumban elhelyezett hengeres, egyenes drótot állandó értékű feszültségforrásra kapcsolunk. Ekkor a drót izzó állapotban fényt sugároz ki. Hogyan lehet a drót méretét úgy megváltoztatni, hogy változatlan felvett teljesítmény mellett az összes kisugárzott látható fény mennyisége minél több legyen? A fajlagos ellenállás nem függ a hőmérséklettől.* (Károlyházy Frigyes)

Megoldás. Legyen a drót kezdeti hossza L_0, kezdeti rádiusza r_0, fajlagos ellenállása k és az állandó feszültség U. Ekkor a keresztmetszet területe πr_0^2, az ellenállás $R = kL_0/(\pi r_0^2)$, az áramerősség $I_0 = U/R = \pi U r_0^2/(kL_0)$ és a felvett teljesítmény $N = UI_0 = \pi U^2 r_0^2/(kL_0)$.

A drót r rádiusza és L hossza csak úgy változtatható, hogy N állandó maradjon. Ez természetesen azt jelenti, hogy az R ellenállásnak is állandónak kell maradnia (*4. ábra*).

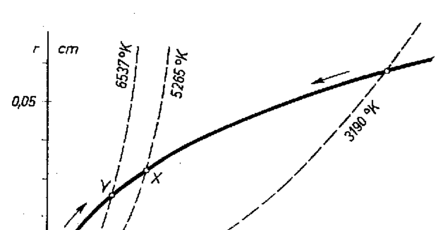


4. ábra

Ábrázoljuk a drót méreteit meghatározó r rádiuszt és L hosszat $(L,\ r)$ koordináta-rendszerünkben egy-egy ponttal (*5. ábra*). A koordinátasík minden egyes pontja valamilyen $L,\ r$ adatokkal bíró drótméretezést jelent. Tekintettel arra, hogy a teljesítmény állandó, a megengedett $L,\ r$ értékpárok az

$$r = \sqrt{\frac{kN}{\pi U^2}} \cdot \sqrt{L}$$

fekvő parabola pontjai által vannak meghatározva (folytonos vonal). E fekvő parabola alatti pontok olyan $L,\ r$ értékpárokat jelentenek, amelyeknél a drót teljesítményfelvétele kisebb, a parabola felett fekvő pontokban pedig nagyobb, mint a kezdeti N. Ábránk arra az esetre vonatkozik, amikor $L_0 = 40$ cm, $r_0 = 0{,}06$ cm, $k = 10^{-3}$ ohm $\cdot$ cm, $U = 177$ volt, $N = 8850$ watt.



5. ábra

A drótba betáplált egész elektromos teljesítmény sugárzással távozik, a legkülönbözőbb hullámhosszakon. Jelentse f a drót felszínének 1 cm^2 nagyságú területéről az összes hullámhosszakon kisugárzott teljesítményt. Ekkor a drót egész hengeres felszíne az $S = 2\pi rL \cdot f$ teljesítményt sugározza ki az összes hullámhosszakon (és ez egyenlő az N betáplált teljesítménnyel). Minket az érdekel, mennyit lát ebből a szem? A szem érzékenysége a $\lambda_0 = 0{,}55\,\mu = 5{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm körüli keskeny sávra szorítkozik. Az 1 cm^2-ről az összes hullámhosszon kisugárzott energiának csak egy hányada, f_l hasznos a szem számára, és ez biztosan kevesebb, mint f:

$$f_l = \eta f, \quad \text{ahol} \quad 0 < \eta < 1.$$

Az egész hengeres felszínről a látható hullámhosszakon kisugárzott energia

$$S_l = 2\pi r L \cdot f_1 = (2\pi r L \cdot f)\eta.$$

Olyan drótméretezést keresünk, amelynél S_l a lehető legnagyobb. Mivel a zárójelben levő mennyiség állandó (egyenlő a felvett teljesítménnyel), az S_l látható teljesítmény csak az η hatásfok növelésével javítható. Tehát a válasz úgy szól, hogy olyan L, r drótméretezés választandó, amely mellett az 1 cm^2-ről kisugárzott teljesítmény minél nagyobb része a $0{,}55\,\mu$ körüli hullámhosszakon kerül kibocsátásra. Ez pedig a hőmérséklettől függ.

Az 1 cm^2 felszínről az összes hullámhosszon kisugárzott teljesítmény Stefan–Boltzmann törvénye szerint az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos:

$$f = \sigma T^4 = 5{,}68 \cdot 10^{-12} T^4,$$

ha a teljesítményt wattban mérjük. Az egész kisugárzott teljesítményt egyenlővé tesszük a betáplált teljesítménnyel:

$$2\pi r L \cdot \sigma T^4 = \frac{\pi U^2}{k} \cdot \frac{r^2}{L},$$

innen az izzószál hőmérséklete:

$$T = \sqrt[4]{\frac{U^2}{2k\sigma}} \cdot \sqrt[4]{\frac{r}{L^2}}.$$

Tehát bármely drótméret-adatpár esetében kiszámítható a hőmérséklet. Képletünkből következik, hogy azon L, r értékpárok, amelyek mellett a drót ugyanazon hőfokú, álló parabolákon vannak:

$$r = \frac{2\sigma k T^4}{U^2} \cdot L^2.$$

Ezeket az egyező hőmérsékletű drót-méreteket feltüntető parabolákat *5. ábránk* szaggatott vonalakkal ábrázolja. Az $L_0 = 40$ cm, $r_0 = 0{,}06$ cm kezdeti állapothoz 3190 K tartozik. E parabola alatt hidegebb, fölötte melegebb hőmérsékleteket adó L, r-pontok vannak.

A Wien-féle eltolódási törvény szerint a legnagyobb energiával kisugárzott hullámhossz a sugárzó test abszolút hőmérsékletével fordítottan arányos:

$$\lambda_m \cdot T_m = 0{,}2896,$$

ha a hullámhosszat cm-ben mérjük. Kézenfekvő gondolat, állapodjunk meg olyan hőmérsékletben, amelyen a $0{,}55\,\mu$-os, szemre legértékesebb hullámhossznál van a maximum. A Wien-törvény szerint ekkor a hőmérséklet 5268 K. Az ehhez tartozó álló parabola az adott teljesítmény fekvő paraboláját X pontban metszi. Tehát az a teendő, hogy drótunk adatait ezen X pont koordinátái szerint válasszuk ($L_m = 10{,}50$ cm, $r_m = 0{,}0307$ cm). Ha a kezdeti adatokat jellemző pont ettől jobbra fekszik, akkor emelni kell a hőmérsékletet, amíg eljutunk X-be, ha pedig balra fekszik, akkor csökkenteni kell a hőmérsékletet (mert eredetileg az energiamaximum az ultraibolya felé feküdt). A valóságban a szál nem bír ki ilyen magas hőmérsékleteket, és a fajlagos ellenállás is függ a hőmérséklettől.

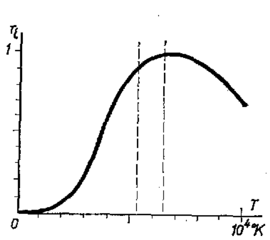
Érdekes dolog, hogy az a helyesnek látszó megállapítás, amely szerint a hőfokot úgy kell megválasztani, hogy a maximum a legjobban látható hullámhossz területére essen, kiigazításra szorul. Az η hatásfok f_l látható és f összes teljesítmény hányadosa. f_l-t a Wien-féle sugárzási törvényből számíthatjuk:

$$f_l = \frac{K}{\lambda_0^5} \mathrm{e}^{-C/(T\lambda_0)},$$

f pedig a Stefan–Boltzmann-törvényből ismeretes: $f = \sigma T^4$. Ezek hányadosa a hatásfok:

$$\eta = \frac{K}{\lambda_0^5} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-C/(T\lambda_0)}}{\sigma T^4}.$$

E függvény elemzése azt mutatja, hogy a maximuma $T_{mm} = 6537$ K-nél van. Tehát a 6537 K-hez tartozó álló parabola és a fekvő parabola Y metszéspontját kell megvalósítanunk $L_{mm} = 5{,}91$ cm és $r_{mm} = 0{,}0231$ cm adatokkal. Ekkor a kisugárzott teljesítmény maximuma $0{,}45\,\mu$-nál van, de a $0{,}55\,\mu$-ra érzékeny szem számára mégis ez a legkedvezőbb hőmérséklet. A *6. ábra* az η hatásfok hőmérséklettől függését mutatja.



6. ábra

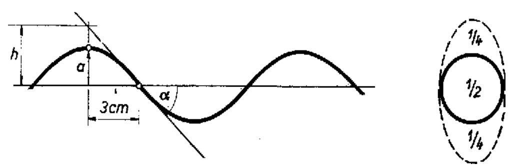
3. *Messziről nézzük a Hold vízben tükröződő képét és azt látjuk, hogy eredetileg 0,5°-os látószöge függőleges irányban megkétszereződött. A víz felszínén 12* cm *hullámhosszúságú hullámok futnak felénk. Mekkora ezek amplitúdója?*

Megoldás. Sima víztükör esetén a Hold képét 0,5°-os látószöggel látjuk a tükröződés után. Ha a síktükör α szöggel elbillen, akkor a kép 2α szöggel billen el. A Hold tükörképének alul-fölül 0,25°-os kiszélesedése azt jelenti, hogy a tükröző felszín mindkét irányban 0,125°-kal billen ki a vízszintes helyzetéből (*7. ábra*). A sinus-görbe alakú tükröző felület legmeredekebb része az inflexiós pontokban van, itt kell a szögnek 0,125°-nak lennie. Ekkor a h magasság

$$h = 3\ \text{cm} \cdot \operatorname{tg} 0{,}125^\circ = 0{,}0129\ \text{cm}.$$

Azonban az amplitúdó ennek a h magasságnak csak $2/\pi$ törtrésze, ezért az amplitúdó

$$a = \frac{2h}{\pi} = 0{,}0083\ \text{cm} = 0{,}083\ \text{mm}.$$



7. ábra

A verseny eredménye. I. díjat nyert *Rácz Miklós* (a Veszprémi Vegyipari Technikumban Burger László és Pulai István tanítványa). Dicséretet kapott *Lovász László* (a budapesti Fazekas Mihály gimnáziumban Szalay Béla és Wiedemann László tanítványa), *Szádeczky Kardoss Gedeon* (a budapesti Fazekas Mihály gimnáziumban Szalay Béla tanítványa) és *Tüttő Péter* (a budapesti Eötvös gimnáziumban Veres Mihályné tanítványa). A versenyen kívül résztvevő középiskolai tanulók közül kitüntető jutalmat kaptak *Babai László* és *Marossy Ferenc* (mindketten a budapesti Fazekas Mihály gimnázium III. osztályos tanulói, tanáruk Hutay Ferenc); dicséretet kapott *Szalay Sándor* (a debreceni Kossuth gyakorló gimnázium IV. osztályában Trón Lászlóné tanítványa).