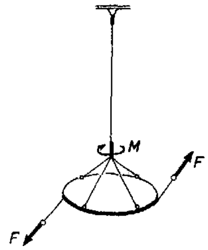
Csavarási inga: forgási rezgések

A forgási rezgések létrejötte

Ha egy testre ható erők eredője 0, akkor a test haladó mozgás vonatkozásában egyensúlyban van. Ha ezenkívül az erők közös támadáspontban hatnak (vagy ha hatásvonalaik közös ponton mennek keresztül és ez a közös pont nem a végtelen távoli pont, azaz az erők nem párhuzamosak), akkor a test forgómozgás szempontjából is egyensúlyban van, tehát szögsebessége vagy 0 vagy állandó. Két egyenlő nagyságú párhuzamos, ellentétes irányú erő esetén, vagy ha több erőt két olyan eredőben tudunk a vektori összegezés szabályai szerint egyesíteni, hogy a két eredő erőpárt alkot, akkor gyorsuló forgómozgás jön létre az ismert $M = I\beta$ alapösszefüggés szerint.



1. ábra

Ha a kísérletileg könnyen megvalósítható 1. ábra szerinti elrendezésre egyre növekvő nyomatékú erőpárral hatunk, a közvetlen tapasztalat azt mutatja, hogy a szögelfordulás arányos a forgatónyomatékkal és a szögelfordulás előjele megegyezik a forgatónyomaték előjelével;

$$M_1 = D\varphi,$$

ahol M_1 az alkalmazott forgatónyomaték, φ az elfordulás szöge, D a direkciós nyomaték, mely az egyensúlyi helyzetből φ szöggel elforgatott testre ható M_1 forgatónyomaték nagyságának és φ-nek a hányadosa. Dimenziója *erő* $\cdot$*hosszúság*, szám szerint azzal a forgatónyomatékkal egyezik meg, mely az illető elrendezésen 1 radián szögelfordulást hoz létre. A D-nek MKS egysége N·m.

A külső forgatónyomaték meghatározott értéke mellett a korong egyensúlyi helyzetet foglal el. Mivel erőpárt csak erőpárral lehet kiegyensúlyozni, ezért az a forgatónyomaték, melyet a torziószál a felfüggesztett testre kifejt, a külső forgatónyomatékkal egyenlő nagyságú, de ellentétes előjelű: $M = -M_1$. Az előző összefüggés felhasználásával

$$M = -D\varphi.$$

Ha a külső M_1 forgatónyomatékot megszüntetjük, ez a rugalmas elcsavarodásból származó M nyomaték a testen forgómozgást hoz létre. Az így létrejövő mozgást forgási rezgésnek, a berendezést csavarási ingának nevezzük.

A haladó és forgómozgás közötti formális analógia alapján is látszik, hogy a lineáris nyomatéki törvénynek akár az M_1, akár az M nyomatékra felírt alakja kísértetiesen hasonlít a lineáris erőtörvény $F_1 = Dx$ és $F = -Dx$ alakjához, ahol F_1 az alakváltoztató erő, melyet a rugóra helyezett testeknek az egyensúlyi helyzetből való x kitérése esetén kell kifejtenünk, F az x kitérés esetén a rugótól a testre ható rugalmas visszatérítő erő, D pedig jelenleg a direkciós erő (nem szerencsés a direkciós nyomatékkal való azonos jelölés, ezért az irodalomban a direkciós nyomatékot D^*-gal szokás jelölni), melynek dimenziója $\frac{\textit{erő}}{\textit{hosszúság}}$, MKS egysége $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. A direkciós erő reciproka a k rugóállandó, dimenziója $\frac{\textit{hosszúság}}{\textit{erő}}$, egysége $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}$. A rugóra helyezett testet egyensúlyi helyzetéből kitérítve $F_1 = -F$, és az F_1 megszüntetése után (a testet elengedve) F által létrehozott mozgás a harmonikus rezgőmozgás.

Csavarási munka és a torziószál energiája

Forgómozgás során, ha a forgatónyomaték állandó, a végzett munkát $W = M \cdot \varphi$ alapon számítjuk. Ha a nyomaték nem állandó, akkor a munkát

$$W = M_{\text{átl}} \cdot \varphi$$

összefüggés adja meg. Mivel a nyomaték a szögelfordulással arányos, mint lineárisan változó mennyiség átlagát, ebben az összefüggésben is az átlagnyomatékot a kezdő- és végérték számtani közepe adja:

$$W = M_{\text{átl}}\varphi = \frac{M_{\max} + M_{\min}}{2}(\varphi_{\max} - \varphi_{\min}) = \frac{D}{2}(\varphi_{\max} + \varphi_{\min})(\varphi_{\max} - \varphi_{\min}).$$

A szorzás elvégzése után

$$W = \frac{1}{2}D\varphi_{\max}^2 - \frac{1}{2}D\varphi_{\min}^2.$$

Ha a csavarást az egyensúlyi helyzettől kezdjük, akkor

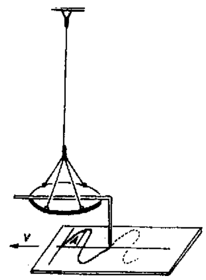
$$W = \frac{1}{2}D\varphi_0^2,$$

ahol φ_0 a maximális szögelfordulás. Az $M_0 = D\varphi_0$ összefüggés felhasználásával a munkára még a következő két kifejezést nyerjük:

$$W = \frac{M_0^2}{2D} = \frac{M_0\varphi_0}{2}.$$

A munkának ezen három utóbbi képlete a torziószál energiáját is megadja az energiatétel értelmében.

A forgási rezgések jellemzése



2. ábra

A közvetlen tapasztalat azt mutatja, hogy a létrejövő mozgás időben periodikus. Az ingára a 2. ábra szerint ecsetet helyezve, az egyenletesen mozgatott papírlapon kis szögelfordulás esetén szinuszos jel marad. Legyen a periódus T, az amplitúdó A. A kitérés időfüggvénye $y = A\sin cT$. Kis szögek esetén y arányos φ-vel: $y = b \cdot \varphi$, ahol b az ecsetnek a forgástengelytől való távolsága. Ugyanígy $A = b \cdot \varphi_0$, ahol φ_0 a maximális kitérés szöge. Ezeknek az adatoknak a behelyettesítésével a szögelfordulás időtől való függése:

$$\varphi = \varphi_0 \sin ct.$$

A c konstans meghatározása érdekében vegyük figyelembe azt, hogy $t = \dfrac{T}{4}$ idő elteltével $\varphi = \varphi_0$. Ez az értékpár tehát ki kell, hogy elégítse az alábbi egyenletet:

$$\varphi_0 = \varphi_0 \sin c \cdot \frac{T}{4}.$$

Ebből azonnal következik, hogy $c = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot n$. Ez a mennyiség a körfrekvencia, jelentése a 2π idő alatt történő forgási rezgések száma. A későbbiekben a körfrekvenciát Ω-val jelöljük. Ezzel a szögelfordulás időfüggvénye:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \Omega t.$$

A Δt időintervallumra vett átlagos szögsebességet $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ adja. Mivel a szögelfordulás a mozgás kezdetétől számított $t + \Delta t$ időpillanatban $\varphi_0 \sin \Omega(t + \Delta t)$, a t időpillanatban $\varphi_0 \sin \Omega t$, ezért az átlagos szögsebesség

$$\overline{\omega} = \frac{\varphi_0 \sin \Omega(t + \Delta t) - \varphi_0 \sin \Omega t}{\Delta t}$$

Az összegezési tétel értelmében

$$\omega = \varphi_0 \frac{\sin \Omega t \cdot \cos \Omega\Delta t + \cos \Omega t \sin \Omega\Delta t - \sin \Omega t}{\Delta t}.$$

Ez az átlagos szögsebesség annál jobban megközelíti a pillanatnyi szögsebességet, minél kisebb a Δt időintervallum. De ekkor az $\Omega\Delta t$ szög is egyre kisebb lesz. Kis szögek esetén

$$\cos \Omega\Delta t \approx 1,$$
$$\sin \Omega\Delta t \approx \Omega\Delta t.$$

Tehát az átlagos szögsebesség tetszőleges pontossággal megközelíti az

$$\omega = \varphi_0 \frac{\sin \Omega t + \Omega\Delta t \cos \Omega t - \sin \Omega t}{\Delta t} = \varphi_0 \Omega \cos \Omega t$$

értéket, hacsak Δt elég kicsi, vagyis a pillanatnyi szögsebesség:

$$\omega = \varphi_0 \Omega \cos \Omega t.$$

Ez az összefüggés minden forgási rezgésre igaz, e leírásból semmit nem tudunk meg a rezgések periódusáról. A közvetlen tapasztalat azt mutatja, hogy a rezgésidő a torziószál direkciós nyomatékától, valamint a rendszer tehetetlenségi nyomatékától függ. Ezeket az adatokat úgy tudjuk például az összefüggéseinkbe behozni, hogy energetikai megfontolásokat végzünk. A rendszerre érvényes az energiamegmaradás elve (külső nyomaték csupán a torziószál befogásánál hat, de ott a szögelfordulás 0). A maximális szögelfordulásnál csak a torziószálnak van rugalmas energiája, egy tetszőleges helyzetben pedig a torziószálnak rugalmas és a testnek forgási energiája van:

$$\frac{1}{2}D\varphi_0^2 = \frac{1}{2}D\varphi^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Ebből

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}(\varphi_0^2 - \varphi^2)}.$$

A $\varphi = \varphi_0 \sin \Omega t$ helyettesítéssel

$$\omega = \varphi_0 \sqrt{\frac{D}{I}} \cos \Omega t.$$

A szögsebességre kapott két összefüggés összevetéséből

$$\Omega = \sqrt{\frac{D}{I}}.$$

Ebből

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}.$$

Ha a pillanatnyi szöggyorsulást $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ összefüggés alapján a Δt időintervallumon belüli átlagos szöggyorsulásból az előbbiekhez hasonló módon számítjuk, akkor a

$$\beta = -\varphi_0 \Omega^2 \sin \Omega t$$

összefüggéshez jutunk. Másrészt a forgómozgás alapegyenletéből

$$I\beta = -D\varphi_0 \sin \Omega t,$$

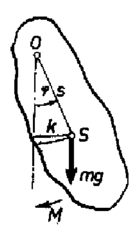
ebből

$$\beta = -\varphi_0 \frac{D}{I} \sin \Omega t.$$

A gyorsulásra kapott két kifejezés összevetéséből szintén a már megismert rezgésidő képlet adódik.

A fizikai inga

A fizikai inga olyan lengő rendszer, melynek minden pontja körpályán mozog. Legyen az inga tömege m, tehetetlenségi nyomatéka a 0 ponton átmenő tengelyre I, súlypontjának a forgástengelytől mért távolsága s (3. ábra).



3. ábra

Az ingát egyensúlyi helyzetéből φ szöggel kitérítve a visszatérítő nyomaték

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin \varphi.$$

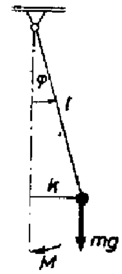
Ha φ kicsiny, akkor $\sin \varphi \approx \varphi$, és figyelembe véve φ és M ellentétes előjelét, lineáris nyomatéki törvényt kapunk:

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \varphi.$$

A létrejövő mozgás tehát forgási lengés $D = m \cdot g \cdot s$ direkciós nyomatékkal. A rezgésidő képletébe helyettesítve a fizikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgs}}.$$

A fonálinga



4. ábra

Fonálinga esetén (4. ábra) a nyomaték $M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi$. Az előbbi közelítéssel $M = -m \cdot g \cdot l \cdot \varphi$. A $D = m \cdot g \cdot l$ és $I = m \cdot l^2$ összefüggésekkel a rezgésidőre

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{adódik.}$$

A csavarási inga egyik elterjedt alkalmazása az órákban az úgynevezett spirálrugós inga. Ezenkívül közismertek mind a fizika történetében, mind a modern technikában a torziószálas mérési berendezések.

Nagy László