I. rész

1. *Egy focicsapat 20 fős keretében 3 kapus, 6 hátvéd, 7 középpályás és 4 csatár van. Az egyik mérkőzésen 1 kapus, 4 hátvéd, 3 középpályás és 3 csatár fog szerepelni.*

a) Hányféleképpen állíthatja ki az edző a kezdőcsapatot? *(6 pont)*

b) Az edző legalább 40 pontot szeretne elérni az első 15 összecsapáson.

Hányféleképpen történhet ez meg, ha nem számít a megszerzett pontok sorrendje? (A győzelemért 3, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont jár.) *(5 pont)*

Megoldás. *a)* 3 kapusból 1-et $\binom{3}{1}=3$-féleképpen, 6 hátvédből 4-et $\binom{6}{4}=15$-féleképpen, 7 középpályásból 3-at $\binom{7}{3}=35$-féleképpen, 4 csatárból 3-at $\binom{4}{3}=4$-féleképpen választhatunk.

Összesen $3\cdot 15\cdot 35\cdot 4=6300$-féleképpen választhatjuk ki a csapatot.

b) A lehetséges eredményeket (győzelmek, döntetlenek, vereségek) és a pontszámok összegét a következő táblázatban látjuk:

győzelmek	döntetlenek	vereségek	pontszámok összeg
15	0	0	45
14	1	0	43
14	0	1	42
13	2	0	41
13	1	1	40

13 győzelem és 2 vereség 39 pontot ér, 13-nál kevesebb győzelem estén az elérhető maximális pontszám 39 (12 győzelem, 3 döntetlen, 0 vereség).

Összesen 5-féleképpen lehet legalább 40 pontot elérni.

2. *Egy osztály félévi matematikajegyei a következőképpen alakultak:*

osztályzat	1	2	3	4	5
gyakoriság	3	10	7	8	

a) Hányan kaptak jelest, ha tudjuk, hogy az osztályátlag 3,2 és 3,3 közé esik és az osztálylétszám páros? *(9 pont)*

b) Határozzuk meg az osztályzatok móduszát és mediánját. *(4 pont)*

Megoldás. Jelöljük az 5-ösök számát x-szel. Ekkor az átlag:

$$\overline{x}=\frac{3\cdot 1+10\cdot 2+7\cdot 3+8\cdot 4+x\cdot 5}{3+10+7+8+x}=\frac{76+5x}{28+x}\,.$$

A feladat szövege szerint: $3{,}2<\overline{x}<3{,}3$.

$$3{,}2<\frac{76+5x}{28+x},\qquad \text{amiből}\qquad 7{,}56<x,$$

$$\frac{76+5x}{28+x}<3{,}3,\qquad \text{amiből}\qquad x<9{,}65.$$

A kettő összevetésével: $7{,}56<x<9{,}65$.

Mivel x egész szám, ezért a lehetséges értékek: 8, 9, és tudjuk, hogy az osztálylétszám páros, így csak az $x=8$, lehet, és ekkor az osztálylétszám 36.

Vagyis 8 tanuló kapott jeles osztályzatot. (Ekkor az átlag: $\overline{x}=\dfrac{116}{36}\approx 3{,}22$.)

b) A módusz a leggyakrabban előforduló elem, azaz $m=2$.

A medián a nagyság szerinti sorrend 18. és a 19. elemének számtani közepe, azaz $M=3$.

3. *Egy 36 fős osztály ötéves érettségi találkozóján 32-en jelentek meg. Az elmondottakból kiderült, hogy a három leggyakoribb nyári úti cél Erdély, a Zemplén és az Őrség volt. Erdélyben 18-an nyaraltak, az Őrségben 21-en, míg a Zemplént 17-en választották. 11-en voltak Erdélyben és az Őrségben, 9-en az Őrségben és a Zemplénben, míg 8-an Erdélyben és a Zemplénben. Ugyanannyian vannak azok, akik mindhárom helyen nyaraltak már, mint azok, akik a felsoroltak egyikén sem jártak.*

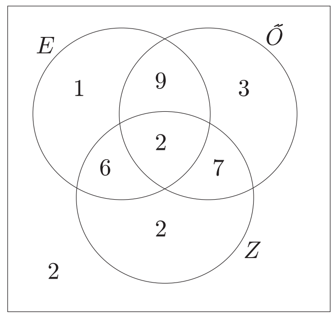
a) Készítsünk Venn-diagrammot. *(9 pont)* *b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy tanulót véletlenszerűen kiválasztva legalább két helyen nyaralt már a felsoroltak közül?* *(4 pont)*

Megoldás. *a)* Jelölje E az Erdélyben, $\tilde{O}$ az Őrségben, Z a Zemplénben járt emberek halmazát. Ekkor:

$$|E| + |\tilde{O}| + |Z| - |E \cap \tilde{O}| - |E \cap Z| - |\tilde{O} \cap Z| + |E \cap \tilde{O} \cap Z| + \left|\overline{E \cup \tilde{O} \cup Z}\right| = 32.$$

$18 + 21 + 17 - 11 - 8 - 9 + x + x = 32$, amiből $x = 2$.

Most már a Venn-diagramm elkészíthető.



b) A legalább két helyen megfordulók száma:

$$9 + 6 + 7 + 2 = 24.$$

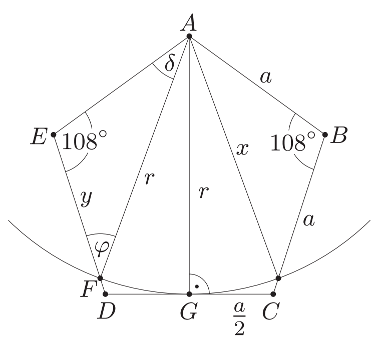
A keresett valószínűség:

$$P = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

4. *Adott az $ABCDE$ 10 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög, és az A középpontú k kör, amely érinti a CD oldalt. Legyen a kör és DE metszéspontja F. Mekkora az EF távolság?* *(14 pont)*

Megoldás. Készítsünk *ábrát.* A koszinusztételből következik, hogy $x^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 108°$, azaz $x^2 = 100 + 100 - 200 \cdot \cos 108°$, amiből

$$x \approx 16{,}18.$$



A Pitagorasz-tételből adódik, hogy

$$r^2 = x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

amiből $r \approx 15{,}39$.

A szinusztétel alapján:

$$\frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin 108°}{r}, \quad \text{amiből} \quad \sin\varphi = \frac{10 \cdot \sin 108°}{15{,}39} \approx 0{,}6180, \quad \text{azaz} \quad \varphi \approx 38{,}17°.$$

Ekkor $\delta = 180° - 108° - 38{,}17° = 33{,}83°$.

Ismét a szinusztételt alkalmazzuk:

$$\frac{y}{\sin\delta} = \frac{a}{\sin\varphi}, \quad \text{amiből} \quad y = \frac{10 \cdot \sin 33{,}83°}{\sin 38{,}17°} \approx 9{,}01$$

adódik.

A keresett szakasz hossza kb. 9,01 cm.

II. rész

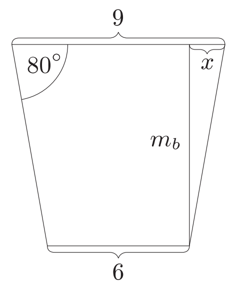
5. *Agyagból szeretnénk csonkakúp alakú bögrét készíteni. Az alapkör belső átmérője* 6 cm, *a fedőköré* 9 cm, *a bögre oldala a vízszintessel* 80°*-os szöget zár be.*

a) Hány deciliter folyadék fér a bögrébe? (*6 pont*)

A fedőkör külső átmérője 9,3 cm, *a bögre fala mindenütt azonos vastagságú, az alja* 4 mm *vastag, a fülét* 1,5 cm *átmérőjű* 15 cm *magas egyenes körhengerből készítik. Az agyag sűrűsége* 2,3 g/cm^3.

b) Mennyi 10 000 *bögre össztömege? (A tömeget* kg*-ban adjuk meg.)* (*10 pont*)

Megoldás. Készítsünk *vázlatrajzot.*



Mivel a bögre alapköreinek belső sugarai: $R_b = 4{,}5$, $r_b = 3$, ezért $x = R_b - r_b = 1{,}5$. Felírható:

$$\operatorname{tg} 80^\circ = \frac{m_b}{x} = \frac{m_b}{1{,}5},$$

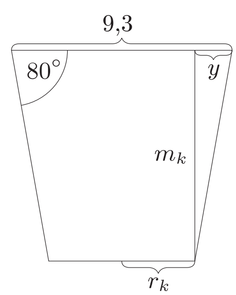
amiből a bögre belső magassága: $m_b = 1{,}5 \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \approx 8{,}51$.

Ekkor a bögre térfogata:

$$V_b = \frac{\left(R_b^2 + R_b \cdot r_b + r_b^2\right) \cdot m_b \pi}{3} = \frac{(4{,}5^2 + 4{,}5 \cdot 3 + 3^2) \cdot 8{,}51\pi}{3} \approx 381.$$

A bögre térfogata: kb. 381 cm$^3 \approx 0{,}381$ dm$^3 = 3{,}81$ dl.

b) A külső adatokkal is elkészítjük az *ábrát.* A bögre nagyobb alapkörének külső sugara: $R_\mathrm{k} = 4{,}65$.



Tudjuk, hogy $m_\mathrm{k} = m_\mathrm{b} + 0{,}4 = 8{,}91$. Ekkor:

$$\operatorname{tg} 80^\circ = \frac{m_k}{y} = \frac{8{,}91}{y}, \quad \text{amiből:} \quad y = \frac{8{,}91}{\operatorname{tg} 80^\circ} \approx 1{,}57.$$

Vagyis

$$r_\mathrm{k} = \frac{9{,}3}{2} - 1{,}57 = 3{,}08.$$

$$V_k = \frac{\left(R_k^2 + R_k \cdot r_k + r_k^2\right) \cdot m_k \pi}{3} = \frac{(4{,}65^2 + 4{,}65 \cdot 3{,}08 + 3{,}08^2) \cdot 8{,}91\pi}{3} \approx 423{,}9.$$

A fül térfogata: $V_\text{fül} = 0{,}75^2 \cdot \pi \cdot 15 \approx 26{,}5$.

A keresett térfogat: $V = V_\mathrm{k} - V_\mathrm{b} + V_\text{fül} = 423{,}9 - 381 + 26{,}5 = 69{,}4$.

Az összes bögre térfogata: $10\,000 \cdot 69{,}4 = 694\,000$.

Az összes bögre tömege: $m = 694\,000 \cdot 2{,}3 = 1\,596\,200$.

Vagyis a bögrék tömege kb. 1 596 200 g, ami kb. 1596 kg.

6. *a) Határozzuk meg p értékét úgy, hogy a* $9x^2+(p+16)x+2{,}4p+1$ *kifejezés teljes négyzet legyen.* *(9 pont)*
b) Számoljuk ki a

$$\int_3^5 (9x^2+66x+121)\,dx$$

kifejezés értékét. *(7 pont)*

Megoldás. *a)* A kifejezés pontosan akkor teljes négyzet, ha a két zérushely egyenlő, azaz a diszkrimináns 0.

$$D=b^2-4ac=(p+16)^2-4\cdot 9\cdot(2{,}4\,p+1)=0, \quad \text{amiből} \quad p^2-54{,}4\,p+220=0.$$

$$p_{1,2}=\frac{54{,}4\pm\sqrt{2959{,}36-880}}{2}=\frac{54{,}4\pm 45{,}6}{2}.$$

A kifejezés teljes négyzet lesz, ha $p_1=50$, $p_2=4{,}4$.
b)

$$= 3\cdot 5^3+33\cdot 5^2+121\cdot 5-(3\cdot 3^3+33\cdot 3^2+121\cdot 3)=$$

$$=1805-741=1064.$$

7. *Egy 15 millió lakosú országban egy cég vizsgálja a televízióműsorok nézettségét. 1500 háztartás tévékészülékeit szerelték fel egy olyan berendezéssel, amely mindig rögzíti, hogy ki, mikor, melyik csatorna adását nézte. Az így figyelt 3200 emberből – akik nem- és korbeli összetétele a valóságot tükrözi – tudják kiszámítani a nézettségi adatokat. A mintában szereplő 3200 fő kor és nem szerinti eloszlását az alábbi* táblázat *mutatja.*

	0–17	18–27	28–38	39–49	50–65	66–
nők	540		240	220	290	110
férfiak	520		230	210	270	

a) Töltsük ki a táblázat hiányzó adatait, ha tudjuk, hogy a 65 évnél idősebb férfiak száma 375 000, és a vizsgált személyek között 100-zal több a nő, mint a férfi. *(6 pont)*
b) A szombat délelőtti gyerekműsort a minta 70 tagja nézte. Hány nézőt jelent ez országosan? *(2 pont)*
c) Ha ebben az időben 1,7 millióan tévéztek, akkor az éppen tévézők hány százaléka nézte a gyerekműsort? *(2 pont)*
d) Egy műsor nézettsége jó, ha az éppen akkor tévézők legalább 25%-a azt nézi. Egy péntek esti vetélkedőműsort 504-en néztek meg a mintából. Jó-e a műsor nézettsége, ha a lakosság 60%-a tévézett ekkor? *(6 pont)*

Megoldás. *a)* $\dfrac{375\,000}{15\,000\,000}\cdot 3200=80$, vagyis a mintában szereplő 65 évnél idősebb férfiak száma 80.
Tudjuk, hogy $x+(x+100)=3200$, azaz $x=1550$. Vagyis 1550 férfi és 1650 nő van a mintában.

$$1550-520-230-210-270-80=240,$$
$$1650-540-240-220-290-110=250.$$

Így megkaptuk a táblázat hiányzó adatait:

	0–17	18–27	28–38	39–49	50–65	66–
nők	540	**250**	240	220	290	110
férfiak	520	**240**	230	210	270	**80**

b) $\dfrac{70}{3200}\cdot 15\,000\,000=328\,125$. Vagyis ez országosan 328 125 nézőt jelent.
c) $\dfrac{328\,125}{1\,700\,000}\approx 0{,}193=19{,}3\%$. A tévézők kb. 19,3%-a nézte a gyerekműsort.
d) $\dfrac{504}{3200}\cdot 15\,000\,000=2\,362\,500$, és $15\,000\,000\cdot 0{,}6=9\,000\,000$, továbbá

$$\frac{2\,362\,500}{9\,000\,000}=0{,}2625=26{,}25\%.$$

Vagyis a vizsgált műsornak jó a nézettsége.

8. *Legyen A halmaz a* $\left]-\frac{9\pi}{4};2\pi\right]$, *B halmaz pedig a* $\left[\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{2}\right[$ *intervallum. Adjuk meg a*

$$(7\sin x-2)^2=(5\sin x-6)^2-4(\sin x+2)$$

egyenlet megoldásait az $A\backslash B$ *és az* $A\cap B$ *halmazokon.* (*16 pont*)

Megoldás. A műveletek elvégzése és a $\sin x=y$ helyettesítés után kapjuk:

$$49y^2-28y+4=25y^2-60y+36-4y-8,$$
$$2y^2+3y-2=0,$$
$$y_1=\frac{1}{2},\quad y_2=-2.$$

y_2 nem megoldás, mert $(-1\le\sin x\le 1)$.

Vagyis $\sin x=\frac{1}{2}$, azaz $x_1=\frac{\pi}{6}+2k_1\pi$, $x_2=\frac{5\pi}{6}+2k_2\pi$, $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

$A\setminus B=\left]-\frac{9\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right]$, az intervallumba eső gyökök: $-\frac{11\pi}{6}$ és $-\frac{7\pi}{6}$.

$A\cap B=\left[\frac{\pi}{6};2\pi\right]$, az intervallumba eső gyökök: $\frac{\pi}{6}$ és $\frac{5\pi}{6}$.

9. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$x+\log_{21}(3^x+1)=x\cdot\log_{21}7+\log_{21}756.$$ (*16 pont*)

Megoldás. A logaritmus azonosságai alapján:

$$\log_{21}21^x+\log_{21}(3^x+1)=\log_{21}7^x+\log_{21}756,$$
$$\log_{21}21^x(3^x+1)=\log_{21}(7^x\cdot 756).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt:

$$21^x(3^x+1)=7^x\cdot 756,$$
$$7^x3^x(3^x+1)=7^x\cdot 756.$$

Mivel $7^x\neq 0$, ezért oszthatunk vele:

$$3^x(3^x+1)=756,$$
$$(3^x)^2+3^x-756=0,$$
$$(3^x)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 756}}{2}=\frac{-1\pm 55}{2}.$$
$$y_1=27,\qquad y_2=-28.$$

A -28 nem megoldás, mert $3^x>0$. Vagyis $3^x=3^3$, azaz: $x=3$. Ez minden feltételnek megfelel, így valóban megoldása az egyenletnek.