

## I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a  $27^x < 6 \cdot 9^x + 3^{x+3}$  egyenlőtlenséget. (12 pont)
2. Egy háromszög leghosszabb oldalának hossza 16, legrövidebb oldalának hossza pedig 10. A háromszög legnagyobb szöge kétszer akkora, mint a legkisebb. Mekkora a háromszög szögei és hiányzó oldala? (12 pont)
3. Anna és Bence egy játékban négy szabályos dobókockát dobál. Anna nyer, ha a dobott számok között vannak egyenlők, Bence nyer, ha a dobott számok között van legalább egy 6-os. Amennyiben mindkét feltétel teljesül, a játék döntetlen; ha egyik feltétel sem teljesül, tovább játszanak.
- a) Melyiküknek van nagyobb esélye a nyeresre? (7 pont)
- b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy játék döntetlenre végződik? (6 pont)
4. Az  $ABC$  háromszög oldalainak hossza:  $AB = 34$ ,  $BC = 16$ ,  $AC = 30$ . A háromszög köré írható kör középpontja legyen  $P$ , a beírható kör középpontja  $Q$ . Számítsuk ki a  $PQ$  szakasz hosszát. (14 pont)

## II. rész

5. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{4 - 4x^2 + 4xy - y^2} = \log_x(y - 2) + \log_{y-2}x.$$

(16 pont)

6. Egy  $a$  élű kockát átlukasztunk az egyik lapjára merőlegesen. A kivágott rész egy olyan négyzetes oszlop, melynek alaplappja egy  $b$  élű négyzet, magassága pedig  $a$ .

a) Igazoljuk, hogy ha a keletkezett test térfogata az eredeti kocka térfogatánál 25%-kal kisebb, akkor felszíne az eredeti felszínél 25%-kal nagyobb.

b) Igazoljuk, hogy az előző állításban más szám nem írható a 25 helyére, azaz  $k\%$ -os térfogatcsökkenés semmilyen  $a$  és  $b$  esetén nem járhat  $k\%$ -os felszínnövekedéssel, ha  $k \neq 25$ . (16 pont)

7. Egy osztály 30 tanulója írt dolgozatot matematikából. A dolgozatokra kapott osztályzatok módusza 2, mediánja 3,5, terjedelme 4, átlaga 3,2. Tudjuk továbbá, hogy 1-gyel több 4-es volt, mint 5-ös és a jegyek szórása kisebb, mint 1,36. Határozzuk meg a dolgozatra kapott osztályzatok gyakoriságát. (16 pont)

8. Az  $e$  egyenes egyenlete:  $2x - y = 2$ , a  $P$  parabola egyenlete:  $y = x^2 + 8x + 17$ . Az  $A$  és a  $B$  pontok illeszkednek az  $e$  egyenesre, a  $C$  pont pedig a  $P$  parabolára. Az  $A$  pont abszcisszája  $-1$ , a  $B$  pont ordinátája 2.

Adjuk meg a  $C$  pont koordinátáit úgy, hogy az  $ABC$  háromszög területe a lehető legkisebb legyen. Mekkora ez a minimális terület? (16 pont)

9. Három kétjegyű természetes szám egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja, a három szám összege 198. A három számot növekvő sorrendben egymás mögé írva, a kapott 6-jegyű szám osztható 2009-cel. Melyik ez a három szám? (16 pont)