A lemniszkáta és a számtani-mértani közép

Az Olvasó már bizonyára kíváncsi, vajon hogyan is kapcsolódik össze a Bernoulli-féle lemniszkáta és számtani-mértani közép fogalma. Az elliptikus integrálok minél egyszerűbb kiszámítása a mechanikai alkalmazások szempontjából lényeges kérdés volt. Már Euler is próbált számítási módszereket kidolgozni, de azok még igen nehézkesek voltak. Az igazi áttörést azonban Lagrange 1785-ös cikke jelentette, amelyben több módszert is adott a (8) alakú integrálok[1] egyszerű kiszámítására. Az egyik módszerében definiálta a p, q számok számtani-mértani közepének rekurzióját (amelyet ő még nem nevezett így), majd megfigyelte a közös határérték létezését, és egy transzformáció segítségével sikerült egyszerűbb alakra hoznia a (8) integrált.

Gauss 1791-ben, 14 éves korában „újrafelfedezte” a rekurziót. Az igazi felfedezést azonban 1799. május 30-án tette, amikor észrevette, hogy

$$AG\big(1, \sqrt{2}\,\big) \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Gauss a fenti összefüggést először csak „egyszerű” számolással látta be, 19 tizedesjegy pontossággal(!) kiszámolta $AG\big(1, \sqrt{2}\,\big)$ értékét $\big($az $AG\big(1, \sqrt{2}\,\big)$ reciprokát szokás Gauss-féle konstansnak hívni$\big)$. Természetesen Gauss felfedezésének voltak előzményei. Egyrészt ekkorra a (7) integrálra[2] már igen pontos közelítő értékek voltak ismertek, többek között *James Stirling* (1692–1770) skót matematikusé, aki 16 tizedesjegy pontossággal számolta ki az integrál értékét. Másrészt Gauss ismerte Euler (10) formuláját[3] is, továbbá az abban szereplő integrálok közelítő értékeit. Ennek ellenére a fenti (11) összefüggés felismerése óriási jelentőségű volt, ahogy naplójában fogalmazott, ezzel „az analízis egy teljesen új területe nyílt meg”. Ezt követően Gaussnak sikerült (több) bizonyítást adnia a (11) formulára, sőt később az alábbi sokkal általánosabb összefüggést is belátta:

9. állítás. *Tetszőleges a, b pozitív számok esetén*

$$AG(a,b) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Látszólag az $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ esetben adódó integrál nem hasonlít a (11) formulában szereplő integrálra. Azonban a fenti állításban szereplő integrál egy egyszerű helyettesítéssel (8)-hoz hasonló, úgynevezett Jacobi-féle alakra hozható.

Gauss további vizsgálódásai folyamán a számtani-mértani közép fogalmát komplex számokra is kiterjesztette. Ezenkívül a trigonometrikus függvények mintájára bevezette az úgynevezett lemniszkáta-függvényeket: a „sinus lemniscus” függvényt a (7) integrál(függvény) inverzeként értelmezte. Az elliptikus integrálok inverzeivel és a komplex számtani-mértani középpel kapcsolatos eredményei az elliptikus függvények elméletének kialakulásában fontos szerepet töltöttek be, ezek előfutárai Abel és Jacobi munkáinak.

Variációk egy témára

Az előzőekben megismertük a számtani-mértani közép fogalmát és történetét. Most nézzük meg, mi történik, ha a számtani-mértani közép iterációjában az egyik közepet „kicseréljük” egy másikra, méghozzá a harmonikus középre. Ehhez először emlékeztetünk a harmonikus közép fogalmára és néhány tulajdonságára.

10. definíció. Adott a, b pozitív számok *harmonikus közepe*

$$H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\,.$$

Figyeljük meg, hogy két pozitív szám harmonikus közepe a reciprokaik számtani közepének reciproka, vagyis

$$H(a,b) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)}\,.$$

---

[0] A cikk I. része lapunk 2009. februári számának 72–80. oldalán olvasható.

[1] $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 \pm p^2t^2)(1 \pm q^2t^2)}}\,.$

[2] $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\,.$

[3] $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \cdot \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}}\,dt = \frac{\pi}{4}\,.$

Ebből az észrevételből könnyen adódik a mértani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség:

$$H(a,b) \le G(a,b)$$

minden pozitív valós szám esetén, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Valóban, a számtani és a mértani közép közötti (1) egyenlőtlenség[4] miatt

$$H(a,b) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)} \le \frac{1}{G\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}} = \sqrt{ab} = G(a,b).$$

A számtani, mértani és harmonikus közepekre tehát az alábbi egyenlőtlenségláncolat áll fenn:

$$H(a,b) \le G(a,b) \le A(a,b),$$

ahol egyenlőség pontosan $a = b$ esetén teljesül.

4. feladat. Mutassuk meg, hogy a harmonikus középre teljesül a középérték-tulajdonság, diagonális, szimmetrikus és pozitív homogén.

Végül említsük meg a harmonikus közép egy érdekes speciális tulajdonságát. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy tetszőleges a, b pozitív számok esetén $A(a,b)\cdot H(a,b) = ab$, azaz

$$G\big(A(a,b), H(a,b)\big) = G(a,b), \tag{13}$$

amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy két szám számtani és harmonikus közepének mértani közepe a két szám mértani közepe.

Most már készen állunk a számtani-harmonikus közép definiálására. Legyenek a, b pozitív valós számok és értelmezzük az (a_n) és (b_n) sorozatokat az alábbi rekurziókkal (lásd a [8] könyv 48. oldalán a 45. feladatot, illetve az [5] könyv I. kötetének 62–63. oldalait):

$$a_0 := a \qquad\qquad b_0 := b \tag{14}$$

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \qquad\qquad b_{n+1} := \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}. \tag{15}$$

Szavakban kifejezve, a sorozatok $(n+1)$-edik tagjai rendre az n-edik tagok számtani, illetve harmonikus közepe, azaz $a_{n+1} = A(a_n, b_n)$ és $b_{n+1} = H(a_n, b_n)$.

11. állítás. *Az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek és ugyanaz a határértékük, mégpedig $G(a,b)$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a \ge b$. Ekkor a 4. állítás bizonyításában alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan, a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség, illetve a középérték-tulajdonság felhasználásával kapjuk, hogy

$$b \le b_n \le b_{n+1} \le a_{n+1} \le a_n \le a$$

minden $n \ge 0$ esetén. Ez azt jelenti, hogy (a_n), (b_n) monoton és korlátos sorozatok, ezért mindkettő konvergens, határértékük legyen rendre α és β. Ekkor a (14)–(15) rekurzióból következően

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{és} \qquad \beta = \frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}},$$

ami a diagonalitás miatt éppen azt jelenti, hogy $\alpha = \beta$. (Jegyezzük meg, hogy a határértékek megegyezése az 5. megjegyzésben látott módon is belátható: a (b_n) sorozat monoton növekedéséből adódóan $0 \le a_n - b_n \le 2^{-n}(a-b)$.) Jelöljük a két sorozat közös határértékét α-val. Vegyük észre, hogy a (13) összefüggés miatt

$$G(a_{n+1}, b_{n+1}) = G\big(A(a_n,b_n), H(a_n,b_n)\big) = G(a_n,b_n), \tag{16}$$

ahonnan indukcióval $G(a_n,b_n) = G(a,b)$ adódik minden $n \ge 0$-ra. Innen a bizonyítást kétféleképpen is befejezhetjük. Egyrészt a közepek közötti egyenlőtlenség alapján minden n-re

$b_{n+1} \le G(a_n,b_n) \le a_{n+1}$, vagyis $b_{n+1} \le G(a,b) \le a_{n+1}$, ezért a rendőrelv miatt szükségképpen $\alpha = G(a,b)$. Másfelől a (16) összefüggésben elvégezve a határátmenetet (a mértani közép folytonosságának felhasználásával) $G(a,b) = G(\alpha,\alpha) = \alpha$ adódik. □

12. megjegyzés. Az előbbi bizonyításban a közös határérték meghatározásának (utóbbi) ötletét érdemes külön kiemelnünk. Gondoljuk meg, hogy az $\alpha = G(a,b)$ egyenlőség két alapvető tulajdonságon múlt. Egyfelől a (16) *invarianciáján:* a mértani közép (mint kétváltozós függvény) invariáns a (14)–(15) iterációra nézve, azaz $G(a_{n+1}, b_{n+1}) = G(a_n, b_n)$ minden n-re; másrészt azon, hogy $G(\alpha,\alpha) = \alpha$. Érvényes tehát a következő állítás.

[4] $G(a,b) \le A(a,b)$.

13. állítás [invarianciaelv]. *Tegyük fel, hogy az* (a_n), (b_n) *pozitív tagú sorozatok konvergensek és közös a határértékük, amely legyen* α. *Ha* $\Phi\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ *a pozitív valós számok halmaza) olyan kétváltozós függvény, amely folytonos, továbbá* $\Phi(x,x) = x$ *minden* $x > 0$ *esetén, valamint* Φ *invariáns a két sorozatra nézve, azaz* $\Phi(a_{n+1}, b_{n+1}) = \Phi(a_n, b_n)$ *minden* n*-re, akkor* $\alpha = \Phi(a_0, b_0)$.

Az invarianciaelv segítségével a (12) Gauss-féle formula egy lehetséges bizonyításának ötlete is azonnal kirajzolódik. Definiáljuk a Φ kétváltozós függvényt az alábbi módon:

$$\Phi(a,b) := \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} \right)^{-1}.$$

Ekkor Φ folytonos, ezenkívül $x > 0$ esetén

$$\frac{1}{\Phi(x,x)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2\cos^2\varphi + x^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{x} = \frac{1}{x},$$

így $\Phi(x,x) = x$. Elég lenne tehát megmutatni, hogy Φ invariáns a számtani-mértani közép iterációjára nézve, vagyis $\Phi\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \Phi(a,b)$ minden a, b pozitív számra, ekkor az invarianciaelv miatt

$\Phi(a,b) = AG(a,b)$. Az invariancia igazolása az úgynevezett Gauss-féle transzformációval történhet, amely az elliptikus integrálok elméletében egy fontos integrálátalakító transzformáció, lásd például az [4] cikket, vagy a [5] könyv II. kötetének 144–147. oldalait. A transzformáció első formája már Lagrange korábban említett cikkében megjelent, később Gauss tőle függetlenül általánosabb alakban alkalmazta.

Térjünk most vissza a számtani-harmonikus közepet (amely valójában a mértani közép) definiáló (14)–(15) iterációhoz néhány tulajdonság erejéig.

5. feladat. Igazoljuk, hogy a (14)–(15) iteráció másodrendben konvergens, pontosabban

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{ab}}{\left(a_n - \sqrt{ab}\right)^2} = \frac{1}{2a_n} \approx \frac{1}{2\sqrt{ab}}, \qquad \frac{b_{n+1} - \sqrt{ab}}{\left(b_n - \sqrt{ab}\right)^2} = \frac{\sqrt{ab}}{(a_n + b_n)b_n} \approx \frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

(Útmutatás: használjuk a (16) invarianciát.)

A (16) invariancia segítségével a (14)–(15) rekurziót átírhatjuk „egydimenziós alakba”. Legyen $s = ab = a_n b_n$, ekkor $b_n = \dfrac{s}{a_n}$, és ezt a (15) rekurzióba helyettesítve kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{s}{a_n}\right). \tag{17}$$

A fenti eljárás az úgynevezett Héron-féle (vagy babiloni) módszer, amelyet először *Héron* (kb. i.sz. 10–70) görög matematikus írt le. A módszer egy adott s pozitív valós szám négyzetgyökének közelítő kiszámítására szolgál. Adott $a_0 = a$ pozitív kezdőértékből kiindulva az (a_n) sorozat tagjai egyre jobban megközelítik $\sqrt{s}$-t. Valóban, ezt most bizonyítanunk sem kell, hiszen a Héron-féle módszer a (14)–(15) számtani-harmonikus közép iterációjának egydimenziós alakja, és láttuk, hogy az (a_n) (és a (b_n)) sorozat határértéke éppen $\sqrt{ab} = \sqrt{s}$. Ezzel a Héron-féle módszer konvergenciájára egy új bizonyítást nyertünk. Sőt, az 5. feladat alapján tudjuk, hogy a számtani-harmonikus közép iterációja másodrendben konvergál, így a Héron-féle módszer is másodrendű. Ez azt jelenti, hogy ez a módszer egy gyors és hatékony eljárás egy szám négyzetgyökének közelítő kiszámítására. A módszerről részletesebben lásd még a [7] könyv 109–112. oldalait, illetve a [8] könyv 46. oldalán a 40. feladatot.

A szakasz lezárásaként vizsgáljuk meg mit kapunk, ha a számtani-mértani közepet definiáló rekurzióban a mértani közép helyett a számtani közepet „cseréljük” a harmonikus középre. Definiáljuk tehát az (a_n), (b_n) sorozatokat oly módon, hogy

$$a_0 := a \qquad\qquad b_0 := b \tag{18}$$

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad\qquad b_{n+1} := \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}. \tag{19}$$

ahol a, b adott pozitív valós számok.

14. állítás. *Az* (a_n) *és* (b_n) *sorozatok konvergensek és ugyanaz a határértékük, méghozzá*

$$\frac{1}{AG\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)}.$$

6. feladat. Bizonyítsuk be a 14. állítást. (Útmutatás: fogalmazzuk át a (18)–(19) rekurziót a sorozatok reciprokaira.)

15. definíció. A (18)–(19) sorozatok közös határértékét az a és b számok *mértani-harmonikus közepének* hívjuk és a továbbiakban $GH(a,b)$-vel jelöljük.

A 14. állítás értelmében a mértani-harmonikus közép a reciprokok számtani-mértani közepének reciproka, ezért bizonyos értelemben úgy viselkedik, mint a harmonikus közép.

7. feladat. Igazoljuk, hogy a mértani-harmonikus közép szimmetrikus, pozitív homogén, $GH(a,b) = GH(a_k, b_k)$ minden k-ra, ahol (a_n), (b_n) a mértani-harmonikus közepet definiáló (18)–(19) sorozatok, továbbá

$$\min(a,b) \le H(a,b) \le GH(a,b) \le G(a,b) \le AG(a,b) \le A(a,b) \le \max(a,b),$$

ahol egyenlőség pontosan $a = b$ esetén teljesül, valamint

$$G\big(AG(a,b), GH(a,b)\big) = G(a,b). \tag{20}$$

8. feladat. Milyen invariancia tulajdonságot jelent a (20) összefüggés?

Általánosítás: Gauss-féle rekurziók

Az előzőek mintájára az Olvasó is megpróbálkozhat rekurziók értelmezésével, például a számtani-mértani közép iterációjában valamelyik közepet a négyzetes középre cserélve. Noha az így kapott sorozatok konvergenciája egyszerűen belátható, a közös határértéket általában nem lehet „szép” alakra hozni. Ez nagyrészt azon múlik, hogy meg tudjuk-e találni az invariáns függvényt. Mindenesetre érdemes a kérdéskört általánosan is megfogalmazni, ez a korábbiak alapján nem fog nehézséget okozni. Definiáljuk tehát absztrakt közepek fogalmát.

16. definíció. Legyen $M\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Ekkor M-et *középnek* nevezzük, ha teljesül rá a középérték-tulajdonság, azaz

$$\min(a,b) \le M(a,b) \le \max(a,b). \tag{21}$$

Legyen M és N két közép. Ekkor definiálhatjuk az alábbi *Gauss-féle rekurziót:*

$$a_0 := a \qquad\qquad b_0 := b \tag{22}$$

$$a_{n+1} := M(a_n, b_n) \qquad\qquad b_{n+1} := N(a_n, b_n), \tag{23}$$

ahol a és b adott pozitív számok. A korábbi szakaszokban szereplő rekurziók vizsgálatánál láttuk, hogy a kapott sorozatok konvergenciája lényegében a közepek között fennálló egyenlőtlenségeken (és a középérték-tulajdonságon), a közös határérték létezése pedig a diagonalitáson múlt. Érdemes tehát definiálnunk absztrakt közepek diagonalitásának és összehasonlíthatóságának fogalmát.

17. definíció. Legyen M és N két közép. Ekkor M *szimmetrikus,* ha $M(a,b) = M(b,a)$ minden a, b pozitív számra, M *diagonális*, ha a (21) egyenlőtlenségláncolatban pontosan $a = b$ esetén teljesül egyenlőség (bármelyik egyenlőtlenségben). Ezenkívül azt mondjuk, hogy M *összehasonlítható* N-nel, ha az alábbi három feltétel közül legalább az egyik teljesül:

(*i*) $M(a,b) \ge N(a,b)$ minden a, b pozitív számra;

(*ii*) $N(a,b) \ge M(a,b)$ minden a, b pozitív számra;

(*iii*) $M(a,b) \ge N(a,b)$, ha $a > b > 0$, és $N(a,b) \ge M(a,b)$, ha $b > a > 0$.

Világos, hogy ha M és N szimmetrikus közepek és M összehasonlítható N-nel, akkor fordítva is igaz, N összehasonlítható M-mel. Ez a megfordítás azonban általában (nevezetesen, ha (*iii*) teljesül és $M \ne N$, akkor) nem igaz.

18. állítás. *Tegyük fel, hogy M és N diagonális közepek, továbbá M összehasonlítható N-nel. Ekkor a* (22)–(23) *rekurzióval definiált (a_n), (b_n) sorozatok konvergensek és ugyanaz a határértékük.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a (*iii*) eset áll fenn és $a \ge b$. Ekkor $b_1 = N(a,b) \le M(a,b) = a_1$. Ha valamilyen n-re $b_n \le a_n$ teljesül, akkor az összehasonlíthatóság folytán

$b_{n+1} = N(a_n, b_n) \le M(a_n, b_n) = a_{n+1}$, továbbá a középérték-tulajdonság miatt

$b_n \le a_{n+1} \le a_n$ és $b_n \le b_{n+1} \le a_n$, tehát $b \le b_n \le b_{n+1} \le a_n \le a_{n+1} \le a$ minden n-re. Ez azt jelenti, hogy (a_n), (b_n) korlátos és monoton sorozatok, ezért mindkettő konvergens, határértékeik legyenek rendre α és β. A (22)–(23)

rekurzió (és M, N folytonossága) miatt szükségképpen $\alpha = M(\alpha,\beta)$ és $\beta = N(\alpha,\beta)$, és így a diagonalitásból következően $\alpha = \beta$. Az $a < b$ eset teljesen hasonlóan vizsgálható, csupán az (a_n), (b_n) sorozatok szerepét kell felcserélni. Ha pedig (i) vagy (ii) teljesül, akkor a fenti bizonyítás szóról-szóra megismételhető. Jegyezzük meg, hogy a diagonalitásból valójában csak annyit használtunk fel, hogy legalább az egyik közép rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. $\square$

19. definíció. Az (a_n), (b_n) sorozatok közös határértékét az M és N közepek „keverékének”[5] nevezzük és a továbbiakban $MN(a,b)$-vel jelöljük.

20. megjegyzés. Vegyük észre, hogy a 18. állítás bizonyításából az is kijött, hogy MN rendelkezik a középérték-tulajdonsággal. Belátható, hogy MN folytonos is, tehát közép. Vigyázzunk, hogy általában M és N keveréke különbözik N és M keverékétől. Ha azonban M és N szimmetrikus közepek, akkor könnyen láthatóan $NM(a,b) = MN(a,b)$. Gondoljuk meg (a 7. állítás és a 7. feladat mintájára), hogy M és N esetleges közös speciális tulajdonságai (mint például szimmetria, homogenitás) öröklődnek MN-re. Megemlítjük, hogy a 18. állításban az összehasonlíthatóság feltétele valójában elhagyható. A részleteket illetően lásd a [2] könyvet.

Nézzünk meg most egy konkrét példát a 18. állítás szemléltetésére. Legyen

$$M(a,b) = \frac{3a+b}{4}, \qquad N(a,b) = \frac{a+2b}{3}. \tag{24}$$

Világos, hogy M és N nem szimmetrikusak. Könnyen látható, hogy teljesül a középérték-tulajdonság és a diagonalitás: például, ha $a \geq b$, akkor

$$b = \frac{3b+b}{4} \leq \frac{3a+b}{4} \leq \frac{3a+a}{4} = a, \qquad b = \frac{b+2b}{3} \leq \frac{a+2b}{3} \leq \frac{a+2a}{3} = a,$$

és nyilván egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$. Egyszerű számolással adódik, hogy $M(a,b) - N(a,b) = \frac{5}{12}(a-b)$, így M összehasonlítható N-nel (a (iii) eset áll fenn). Ekkor a 18. állításból következően létezik $MN(a,b)$. Ennek explicit felírásához vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{7}(4a_{n+1} + 3b_{n+1}) = \frac{1}{7}(3a_n + b_n + a_n + 2b_n) = \frac{1}{7}(4a_n + 3b_n),$$

vagyis a $\Phi(x,y) = \frac{1}{7}(4x+3y)$ függvény invariáns az (a_n), (b_n) sorozatokra nézve. Mivel $\Phi(x,x) = \frac{7x}{7} = x$, ezért az invarianciaelvből következően

$$MN(a,b) = \frac{1}{7}(4a+3b).$$

9. feladat. Legyen

$$M(a,b) = \sqrt{a\frac{a+b}{2}}, \qquad N(a,b) = \sqrt{\frac{a+b}{2}b}.$$

Igazoljuk, hogy $a \neq b$ esetén

$$MN(a,b) = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2(\log a - \log b)}}.$$

(Útmutatás: az $a = b$ határeset vizsgálatához használjuk fel, hogy $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\log x} = 1$, lásd a [8] könyv 217. oldalán a 35. feladatot. Lásd még a [3] cikket is.)

Alkalmazás: a π és a számtani-mértani közép

A cikk végén ejtsünk szót a számtani-mértani közép lehetséges alkalmazásainak kérdéséről. Láttuk, hogy már Lagrange is egy konkrét alkalmazás miatt definiálta a számtani-mértani közép iterációját: elliptikus integrálokat akart minél egyszerűbb alakra hozni. Megmutattuk, hogy az iteráció gyorsan konvergál, tehát egy hatékony eljárás, amely Gauss (12) formulája alapján (elsőfajú teljes) elliptikus integrálok közelítő kiszámítására használható.

Az elliptikus integrálok elméletének kialakulása után a számtani-mértani közép fogalma kissé feledésbe merült (és manapság sem túl közismert, annak ellenére, hogy részben elemi eszközökkel is tárgyalható). A 20. században *Richard Brent* és *Eugene Salamin* matematikusok újra felfedezték Gauss néhány eredményét. Egymástól függetlenül 1976-ban a π közelítő kiszámítására egy rendkívül hatékony algoritmust dolgoztak ki, amely a Gauss-féle számtani-mértani közép iterációján alapul. Brent ezen túlmenően azt is észrevette, hogy hasonló eljárás segítségével bizonyos elemi függvények (például a logaritmusfüggvény) is hatékonyan számolhatók.

---

[5] Az angol nyelvű szakirodalomban: compound mean.

Az alábbiakban röviden ismertetjük a Brent–Salamin-algoritmust. Képezzük az (a_n), (b_n), (t_n) sorozatokat a következő rekurziókkal:

$$a_0 := 1, \qquad b_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad t_0 := 1, \tag{25}$$

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \qquad t_{n+1} := t_n - 2^n(a_n^2 - b_n^2). \tag{26}$$

21. állítás. *A* $\pi_n := \dfrac{2a_{n+1}^2}{t_n}$ *sorozat másodrendben a* π*-hez konvergál.*

A fenti állítás bizonyítása az elliptikus integrálok Legendre-féle azonosságán múlik (amely szoros kapcsolatban áll az Euler-féle (10) formulával). Ezért a (25)–(26) rekurziót Gauss-Legendre-algoritmusnak is szokás hívni. A másodrendű konvergencia miatt minden lépésben megkétszereződik a pontos tizedesjegyek száma π_n-ben, ez már néhány lépés elvégzése után is jól látszik: az első 8 lépés a π-nek rendre

0, 3, 8, 19, 41, 94, 171, 344 tizedesjegyét állítja elő pontosan.

Az 1980-as évek elejétől kezdődően *Yasumasa Kanada* japán matematikus és munkatársai a fenti eljárás segítségével „nekiláttak" a π minél több tizedesjegyének kiszámolásához, és ezzel az elmúlt 30 évben sorra állították fel a rekordokat. 1981-ben a π-nek 2 millió tizedesjegyét számolták ki pontosan, 1983-ban már 16 millió tizedesjegyet, 1988-ra 201 millió, 1999-re pedig 206 milliárd tizedesjegyet sikerült pontosan kiszámolniuk. A 2002-es rekord, amelyet ugyancsak Kanada és csapata állított fel: 1 241 100 000 000 tizedesjegy.

Érdemes megemlíteni, hogy Jonathan és Peter Borwein az 1980-as évek közepétől a Brent–Salamin-algoritmushoz hasonló, de annál még gyorsabban konvergáló eljárásokat dolgozott ki a π, illetve az $\dfrac{1}{\pi}$ kiszámítására. A π közelítő számításának történetéről, illetve a számtani-mértani középpel való kapcsolatáról az érdeklődők a [6] cikkben és a [2] könyvben bővebben olvashatnak.

A π tizedesjegyeinek az előbbiekben ismertetett pontosságokkal történő kiszámítása természetesen túlmegy az alkalmazhatóság körén. Ezzel kapcsolatban ismert a következő anekdota (lásd [1]). A π-nek csupán az első 39 tizedesjegye elegendő ahhoz, hogy az univerzum sugarával azonos sugarú kör kerületét ki tudjuk számolni egy hidrogénatom sugarának megfelelő pontossággal. Ennek igazolását (vagy megcáfolását) az Olvasóra bízzuk.

Irodalom

[1] Borwein, J. M. – Borwein, P. B., The Arithmetic-Geometric Mean and Fast Computation of Elementary Functions, *SIAM Review,* Vol. 26, No. 3 (1984), 351–366.

[2] Borwein, J. M. – Borwein, P. B., *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity,* John Wiley (New York, 1987).

[3] Carlson, B. C., Algorithms Involving Arithmetic and Geometric Means, *Amer. Math. Monthly,* **78** (1971), 496–505.

[4] Cox, D. A., The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss, *L'Ensign. Math.,* **30** (1984), 275–330.[6]

[5] Fichtenholz, G. M., Differential- und Integralrechnung I–II, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (Berlin, 1964).

[6] Miel, G., Of Calculations Past and Present: The Archimedean Algorithm, *Amer. Math. Monthly,* **90** (1983), 17–35.

[7] dr. Pintér Lajos, *Analízis I. (a gimnázium speciális matematika osztályai számára),* Tankönyvkiadó (Budapest, 1987).

[8] Urbán János, *Határérték-számítás,* Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1975).

[6] A cikk digitalizált változata elérhető a svájci elektronikus akadémiai könyvtár rendszerén, a `http://retro.seals.ch` oldalon.