Helyettesítsük (2) jobb oldalán α_j és β_j helyébe az (1) szerinti kifejezéseket, majd az összevonás után keletkező kifejezésekben f_k együtthatóját jelöljük E_k-val.
(1) szerint
$$\frac{\alpha_0}{2}=\frac{1}{2n+1}(f_0+f_1+\ldots+f_{2n}).$$
α_j-ben, ill. β_j-ben ($j=1, 2, \ldots, n$) f_k együtthatója $\dfrac{2}{2n+1}\cos(k\cdot x_j)$, ill. $\dfrac{2}{2n+1}\sin(k\cdot x_j)$, így
$$E_k=\frac{1}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}[\cos(k\cdot x_j)\cdot\cos(j\cdot x_i)+\sin(k\cdot x_j)\cdot\sin(j\cdot x_i)]=$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\cos(k-i)x_j.$$
Közben kihasználtuk, hogy $jx_i=ix_j$. Ha $k=i$, akkor nyilván $E_k=1$. Ha igazoljuk még, hogy a $k-i=m\neq 0$ esetben
$$\sum_{j=1}^{n}\cos mx_j=-\frac{1}{2},$$
készen vagyunk.

Tekintsük a derékszögű koordináta–rendszerben a P_0 (1, 0) pontot. Ezt az origó körül pozitív irányban $m\cdot x_i (i=1, 2, \ldots, 2n)$ szöggel elforgatva kapjuk a P_i pontot. Állítjuk, hogy az $\overrightarrow{OP}_0, \overrightarrow{OP}_1, \ldots, \overrightarrow{OP}_{2n}$ vektorok összege a nullvektor. Mivel bármely két szomszédos vektor $m\cdot\dfrac{2\pi}{2n+1}$ szöget zár be, azért e szöggel elforgatva az egész rendszer önmagába megy át, tehát az összegük is, ami csak a nullvektorra áll fenn. Ezt az összefüggést a vektorok első koordinátáira felírva:

(3)
$$\sum_{k=0}^{2n}\cos m\cdot x_k=0.$$
Mivel $m\cdot x_{2n+1-j}=m\cdot 2\pi-m\cdot x_j$, azért $\cos m\cdot x_j=\cos m\cdot x_{2n+1-j}$ ($j=1, 2, \ldots, n$). Ennek alapján (3) a következő alakba írható:
$$2\sum_{j=1}^{n}\cos m\cdot x_j+\cos 0=0,$$
ami éppen az igazolandó összefüggést adja.

Fordán Tibor (Körmend, Kölcsey F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. **1.** Mint azt többen észrevették, a feladat szövegében volt egy apró hiba. α_i-t és β_i-t ugyanis az **(1)** formula az $i=0, 1, \ldots, n$ esetekre értelmezi, a szövegben a kitűzéskor $=$ helyett $\neq$ szerepelt.

2. A α_i, β_i számokat a **(2)** feltétel egyértelműen meghatározza, ez egy $2n+1$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Az α_i, β_i együtthatókat Fourier (ejtsd furié) együtthatóknak nevezik, ezek nélkülözhetetlenek a különböző rezgések tanulmányozásában (mint pl. villamos áramkörök vagy hídszerkezetek méretezésében stb.).

3. Az **(1)** formulák alapján a Fourier együtthatókat kb. $4n^2$ szorzással kaphatjuk meg (ebben már a $\sin jx_i$, és a $\cos jx_i$ kiszámítása is benne van). Egy másik, Cooley és Tukey amerikai matematikusoktól származó eljárás a szükséges szorzások számát $(4n\cdot\log_2 n)$-re szorítja le. Erről a „gyors Fourier–transzformáció”-nak nevezett eljárásról bővebben olvasható Lovász–Gács: Algoritmusok. Műszaki Könyvkiadó, 1978, 88–90. oldalán.