[1]

A1. Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre minden valós x, y, z esetén $f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=0$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f(x,y)=g(x)-g(y)$ teljesül minden valós x és y esetén.

A2. Aladár és Barbara a következő játékot játsszák: Felváltva töltögetik ki egy kezdetben üres 2008×2008-as mátrix elemeit. Aladár kezdi a játékot. Minden fordulóban a soron következő játékos választ egy valós számot és beírja egy üres mezőbe. A játéknak akkor van vége, amikor az egész mátrix megtelik. Aladár nyer, ha a létrejövő mátrix determinánsa nem nulla, és Barbara nyer, ha nulla. Melyiküknek van nyerő stratégiája?

A3. Vegyünk egy pozitív egészekből álló $a_1, a_2, \ldots, a_n$ véges sorozatot. Ha lehetséges, válasszunk két olyan $j<k$ indexet, melyekre a_j nem osztója a_k-nak, és cseréljük ki a_j-t $\operatorname{lnko}(a_j, a_k)$-ra, a_k-t pedig $\operatorname{lkkt}(a_j, a_k)$-ra. Az eljárást ismételjük, ameddig lehet. Bizonyítsuk be, hogy az eljárás előbb-utóbb mindig véget ér, és a végeredményül kapott sorozat nem függ az indexválasztásoktól. (Megjegyzés: lnko a legnagyobb közös osztót, lkkt a legkisebb közös többszöröst jelöli.)

A4. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{ha } \ x \le e \\ xf(\ln x) & \text{ha } \ x > e. \end{cases}$$

függvényt. Konvergens-e a következő összeg: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$?

A5. Legyen $n \ge 3$ egész szám, és legyenek $f(x)$ és $g(x)$ olyan valós együtthatós polinomok, melyekre az $\big(f(1), g(1)\big), \big(f(2), g(2)\big), .$ $\mathbb{R}^2$ pontok az óra járásával ellentétes körüljárás szerint egy szabályos n- szög csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ és $g(x)$ közül legalább az egyiknek a fokszáma legalább $n-1$.

A6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c>0$ konstans, amelyre minden nemtriviális véges G csoportban létezik elemeknek olyan sorozata, melynek hosszúsága legfeljebb $c \ln |G|$, és G minden eleme előáll valamely részsorozatának szorzataként. (A sorozatot alkotó G-beli elemek nem feltétlenül különbözők.) Egy sorozat *részsorozatát* úgy kapjuk, hogy kiválasztunk néhány nem feltétlenül egymásra következő tagját, és a tagok egymás közti sorrendjét megtartjuk. Például 4, 4, 2 részsorozata a 2, 4, 6, 4, 2 elemsorozatnak, míg 2, 2, 4 nem részsorozata.

B1. Legfeljebb hány racionális pont lehet egy $\mathbb{R}^2$-beli körön, amelynek középpontja nem racionális pont? (*Racionális pontnak* azokat a pontokat nevezzük, amelyeknek mindkét koordinátája racionális szám.)

B2. Legyen $F_0(x)=\ln x$, és $F_{n+1}(x)=\displaystyle\int_0^x F_n(t)\,dt$, ha $n \ge 0$ és $x>0$. Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!F_n(1)}{\ln n}$$

határértéket.

B3. Legfeljebb mekkora lehet egy egységnyi oldalhosszúságú 4 dimenziós hiperkocka által tartalmazott kör sugara?

B4. Legyen p prímszám. Legyen $h(x)$ olyan egész együtthatós polinom, melyre $h(0), h(1), \ldots, h(p^2-1)$ különbözőek modulo p^2. Mutassuk meg, hogy $h(0), h(1), \ldots, h(p^3-1)$ különbözőek modulo p^3.

B5. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvényt, amelyre minden q racionális szám esetén teljesül, hogy $f(q)$ is racionális, és ugyanaz a nevezője, mint q-nak. (Egy q racionális szám nevezőjén azt az egyértelműen meghatározott pozitív egész számot értjük, melyre $q=a/b$, ahol a egész, és a és b legnagyobb közös osztója 1.)

B6. n és k pozitív egészek. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számoknak egy σ permutációját *k-limitáltnak* nevezzük, ha minden i-re $\big|\sigma(i)-i\big| \le k$. Bizonyítsuk be, hogy $\{1, 2, \ldots, n\}$ k-limitált permutációinak száma akkor és csak akkor páratlan, ha $n \equiv 0$ vagy $1 \pmod{2k+1}$.

[1]A versenyről megjelent ismertetés lapunk 2005/2. számában olvasható, a 71–72. oldalon. A verseny honlapja: `http://math.scu.edu/putnam/index.html`, a megoldások a `http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml` honlapon találhatók.