I. rész

1. *Tóni bácsi a péceli sportpályán pogácsát és perecet árult. A pogácsán* 25%*, a perecen* 60% *haszna volt. Egy alkalommal ugyanannyi pogácsát adott el, mint perecet, így* 50% *haszonra tett szert. Másnap viszont kétszer annyi pogácsát adott el, mint perecet.*

a) Hány százalék volt ekkor a haszna? (*8 pont*)

b) Később Tóni bácsi kínálatát bővítette gumicukorral és muffinnal. Endre a szurkoláshoz három terméket vásárol. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha egyféle termékből többet is vehet? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Ha a pogácsákért g Ft-ot kapott, akkor ebből $0{,}25g$ Ft a haszna. A perecekért kapott r Ft-ból pedig $0{,}6r$ Ft a haszna. A szöveg alapján tudjuk, hogy $0{,}25g + 0{,}6r = 0{,}5(g + r)$, azaz
$r = 2{,}5g$.

Másnap: $0{,}25 \cdot 2g + 0{,}6r = x(2g + r)$, vagyis $0{,}5g + 1{,}5g = x(2g + 2{,}5g)$, amiből

$$x = \frac{2}{4,5} \approx 0{,}4444.$$

Tóni bácsi haszna kb. 44,44% volt ezen a napon.

b) Ismétléses kombinációról van szó, ezért az esetek száma: $\binom{7-1}{3} = 20$.

2. *Az* U2CK3 *bolygón egy hónap* 41 *napból áll. A helyiek szerint az összes nap alkalmas a három nemes tevékenység (repülés, tanulás, főzés) közül legalább az egyikre. Mindhárom nemes tevékenységre a hónapban csak három nap alkalmas. A repülésre alkalmas napok száma* 19*, a tanulásra alkalmas napok száma* 23*, a főzésre alkalmas napok száma* 19*.*

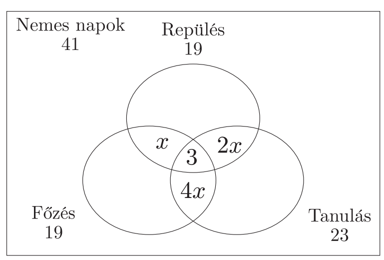
a) A hónap azon napjainak száma, amelyek csak repülésre és főzésre, amelyek csak repülésre és tanulásra, illetve amelyek csak tanulásra és főzésre alkalmasak, egy 2 hányadosú mértani sorozat három egymást követő elemei. Hány olyan nap van a hónapban, amely csak egy nemes tevékenységre alkalmas? (*6 pont*)

b) Ha a 41 nap közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat, akkor mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom nap csak főzésre alkalmas? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Készítsünk *ábrát* a szöveg alapján. A következő egyenletet írhatjuk fel:

$$41 = 19 + 23 + 19 - 7x - 2 \cdot 3,$$

amiből $x = 2$.



Mivel $41 - 2 - 4 - 8 - 3 = 24$, így 24 nap alkalmas pontosan egy nemes tevékenységre.

b) A csak főzésre alkalmas napok száma:

$$19 - 2 - 8 - 3 = 6.$$

Kedvező esetek száma: $\binom{6}{3} = 20$, összes eset száma: $\binom{41}{3} = 10\,660$.

A keresett valószínűség: $p = \dfrac{20}{10\,660} \approx 0{,}001\,876$.

3. *a*) *Végezzük el a következő integrálást:*

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\, dx.$$ (*8 pont*)

b) *Határozzuk meg*

$$f(x) = (x^2 + 3)(x^3 + 2x - 1)$$

differenciálhányados függvényét. (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Tudjuk, hogy $\cos^2 x \cdot \sin^2 x \neq 0$, azaz $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \\ &= (\operatorname{tg} x + C_1) + (-\operatorname{ctg} x + C_2) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C,\end{aligned}$$

ahol $C_1, C_2, C \in \mathbb{R}$.

b)

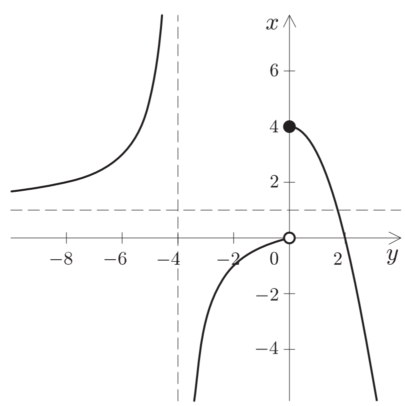
$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^5 + 2x^3 - x^2 + 3x^3 + 6x - 3)' = (x^5 + 5x^3 - x^2 + 6x - 3)' = \\ &= 5x^4 + 15x^2 - 2x + 6.\end{aligned}$$

4. *a*) *Ábrázoljuk a következő hozzárendeléssel megadott függvényt:*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{ha } x \geq 0, \\ \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - x - 20}, & \text{ha } x < 0 \text{ és } x \neq 4. \end{cases}$$ *(8 pont)*

b) *Legyen k egy valós szám. Hány zérushelye van a $g(x) = f(x) - k$ függvénynek?* *(6 pont)*

Megoldás. *a*) Az értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \backslash \{-4\}$.



Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 5x}{x^2 - x - 20} &= \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+4)} = \\ &= \frac{x + 4 - 4}{x + 4} = \frac{x+4}{x+4} - \frac{4}{x+4} = \\ &= -4 \cdot \frac{1}{x+4} + 1.\end{aligned}$$

Most már megrajzolható a függvény *grafikonja*.

b) Az $f(x) = k$ egyenlet megoldásainak száma adja a $g(x)$ zérushelyeinek számát.

Ha $k > 4$, akkor egy zérushely van.

Ha $1 < k \leq 4$, akkor két zérushely van.

Ha $0 \leq k \leq 1$, akkor egy zérushely van.

Ha $k < 0$, akkor két zérushely van.

II. rész

5. *Egy építőmérnök feladata egy szökőkút tervezése és építtetése. A telket nyugatról egy fal, délről egy sövény határolja, a fal és a sövény egymásra merőlegesen helyezkednek el. A telken áll egy szilvafa a faltól és a sövénytől egyaránt* 7 *m-re, egy cseresznyefa a faltól* 5*, a sövénytől* 3 *m-re, és egy szobor a faltól* 18 *és a sövénytől* 9 *m-re. A szökőkutat úgy kell elhelyeznie, hogy a fáktól egyenlő távolságra legyen, és a szökőkút kétszer olyan messze legyen a szobortól, mint a cseresznyefától.*

a) Milyen messze épül a szökőkút a szobortól? (*11 pont*)

b) A szökőkút építéséhez tartozó földmunka elvégzésével Ede 10*, Béla* 12 *óra alatt végezne. Béla reggel* 7 *órakor hozzáfog a munkához, egy óra múlva csatlakozik hozzá Ede, egy alkalommal fél óra szünetet tartanak, majd együtt dolgoznak a munka befejezéséig. Hány órakor végeznek?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A fal vonala legyen a koordinátarendszerben az y tengely, a sövény vonala pedig az x tengely.

A szökőkút koordinátái: $K(x;y)$, a szilvafáé: $S(7;7)$, a cseresznyefáé: $C(5;3)$, a szoboré: $B(18;9)$. A szökőkút távolsága a cseresznyefától legyen t, azaz

$$(x-5)^2+(y-3)^2=t^2. \tag{1}$$

Mivel a szökőkút távolsága a két fától egyenlő, ezért a kút a CS szakasz felezőmerőlegesén kell, hogy legyen.

A felezőpont koordinátái: $F(6;5)$, az $\overrightarrow{FS}(1;2)$ vektor pedig a keresett egyenes normálvektora lesz. Ezek alapján a felezőmerőleges egyenlete:

$$x+2y=16. \tag{2}$$

Mivel a szökőkút távolsága a szobortól kétszer akkora, mint a cseresznyefától, ezért

$$(x-18)^2+(y-9)^2=(2t)^2. \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) egyenletekből álló egyenletrendszerből kaphatjuk a $3y^2-38y+87=0$ egyenletet. Az egyenletrendszer megoldásai:

$$x_1=-\frac{10}{3},\quad y_1=\frac{29}{3},$$

ekkor a szökőkút a telken kívülre esik.

$$x_2=10,\quad y_2=3,\quad t_2=5.$$

Vagyis a szökőkút a szobortól 10 m távolságra épülhet.

b) Jelöljük x-szel a közös munkaidőt. Felírható a következő egyenlet:

$$\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{10}\right)\cdot x=1,\quad \text{amiből}\quad x=5.$$

Vagyis a munka megkezdése után eltelik 1 óra, amíg Béla egyedül dolgozik, majd 5,5 óra telik el a munka befejezéséig, melyben benne van a félórás pihenő is.

Azaz 13 óra 30 perckor végeznek a munkával.

6. *Egy számtani sorozatban az első és a negyedik tag reciprokának összege* 5,5*. A sorozat első, második és hatodik tagja egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Adjuk meg a számtani sorozat első tagját és a differenciáját.* (*16 pont*)

Megoldás. Mivel a számtani sorozat első, második és hatodik tagja egy mértani sorozat három egymást követő tagja, ezért $a(a+5d)=(a+d)^2$. A szöveg alapján a következő egyenletet is felírhatjuk:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+3d}=5{,}5.$$

A két egyenlet rendezésével kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} d(3a-d)&=0,\\ 5{,}5a^2+16{,}5ad-3d-2a&=0.\end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből kapjuk, hogy $d=0$ vagy $d=3a$

I. eset: Ha $d=0$, akkor $5{,}5a^2-2a=0$, azaz $a(5{,}5a-2)=0$. Vagyis: $a=0$ vagy $a=\frac{4}{11}$. Az $a=0$ nem lehet. Az $a=\frac{4}{11}$, $d=0$ megoldása a feladatnak.

II. eset: Ha $d=3a$, akkor $5a^2-a=0$, azaz $a(5a-1)=0$. Vagyis: $a=0$ vagy $a=\frac{1}{5}$. Az $a=0$ nem lehet. Az $a=\frac{1}{5}$, $d=\frac{3}{5}$ megoldása a feladatnak.

7. *Két dobókockát feldobunk. Legyen X a két dobott szám különbségének abszolútértéke.*
a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy X négyzetszám? (*6 pont*)
b) Ábrázoljuk az X valószínűségi változó eloszlását. (*5 pont*)
c) Határozzuk meg X várható értékét. (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A *táblázatban* látjuk a lehetséges eseteket. Kedvező esetek száma: 20. Összes eset száma: 36.

	1	2	3	4	5	6
1	**0**	**1**	2	3	**4**	5
2	**1**	**0**	**1**	2	3	**4**
3	2	**1**	**0**	**1**	2	3
4	3	2	**1**	**0**	**1**	2
5	**4**	3	2	**1**	**0**	**1**
6	5	**4**	3	2	**1**	**0**

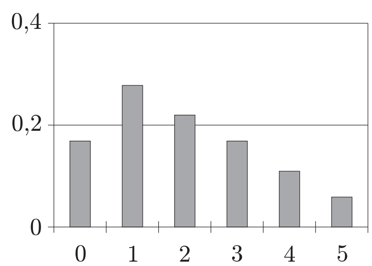
A keresett valószínűség:

$$p = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

b)

X	0	1	2	3	4	5
gyakoriság	6	10	8	6	4	2
$p(X)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Az X valószínűségi változó eloszlását a táblázat értékei alapján ábrázolhatjuk:



c) Az X várható értéke:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}.$$

8. *Az ABC háromszög oldalainak hossza: $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm.*
a) Határozzuk meg a háromszög A csúcsából induló s_a súlyvonalának és a c oldalhoz tartozó f_c szögfelezőjének hosszát. (*8 pont*)
b) Határozzuk meg a háromszög beírt és köré írt körének sugarát. (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Az ABC háromszögben a koszinusztétel:

$$15^2 = 13^2 + 14^2 - 2 \cdot 13 \cdot 14 \cdot \cos\gamma.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\cos\gamma = \frac{5}{13}, \quad \text{azaz} \quad \gamma \approx 67{,}38°.$$

Legyen a BC oldal felezőpontja F. Alkalmazzuk a koszinusztételt az AFC háromszögre:

$$s_a^2 = 6{,}5^2 + 14^2 - 2 \cdot 6{,}5 \cdot 14 \cdot \frac{5}{13} = 168{,}25.$$

Vagyis $s_a = \sqrt{168{,}25} \approx 12{,}97$.

A C-ből induló szögfelező a szemközti oldalt a D pontban metszi. A szögfelező a szemköztes oldalt a közrefogó oldalak arányában osztja, ebből kiszámítjuk a BD szakasz hosszát:

$$\frac{BD}{15 - BD} = \frac{13}{14}, \quad \text{azaz} \quad BD = \frac{65}{9}.$$

A B csúcsnál lévő szög koszinuszát kiszámítjuk koszinusztétellel: $\cos\beta = \dfrac{33}{65}$.

A BCD háromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$f_c^2 = 13^2 + \left(\frac{65}{9}\right)^2 - 2\cdot 13\cdot \frac{65}{9}\cdot\frac{33}{65} = \frac{10\,192}{81},$$

ahonnan $f_c \approx 11{,}22$.

A háromszög s_a súlyvonala kb. 12,97 cm, az f_c szögfelezője kb. 11,22 cm.

b) Kiszámítjuk a háromszög területét (pl. Heron-képlettel):

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84.$$

A beírt kör sugara: $\varrho = \dfrac{t}{s} = \dfrac{84}{21} = 4$. A köré írt kör sugara:

$$r = \frac{abc}{4t} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84} = \frac{65}{8} = 8{,}125.$$

A beírt kör sugara 4 cm, a köré írt sugara 8,125 cm.

9. *Egy húrtrapéz alapú egyenes hasáb alakú edényben víz van. A trapéz párhuzamos oldalai* 4 cm *és* 10 cm, *szárai* 5 cm, *a test magassága* 11,2 cm *hosszú. Ha a testet a trapéz alakú alaplapjáról a legnagyobb területű oldallapjára fordítjuk, akkor az edényben levő víz magassága a harmadára változik. Határozzuk meg az edényben levő víz térfogatát.* (*16 pont*)

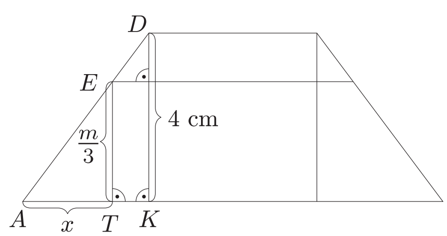
Megoldás. Az adatok alapján: $AK = 3$, a trapéz magassága: $DK = 4$. Ha a test a trapéz alakú alaplapján áll, akkor a benne lévő víz térfogata:

$$V = \frac{10+4}{2}\cdot 4\cdot m = 28m,$$

ahol m a víz magassága.

A test legnagyobb területű oldallapja a 10-szer 11,2-es téglalap. A $KDA\triangle \sim TEA\triangle$, ezért

$$\frac{x}{3} = \frac{\frac{m}{3}}{4},\quad \text{azaz}\quad x = \frac{m}{4}.$$



Ha a test a 10-szer 11,2-es téglalap alakú oldallapján áll, akkor a benne lévő víz térfogata így írható fel:

$$V = \frac{10+10-2\cdot\frac{m}{4}}{2}\cdot\frac{m}{3}\cdot 11{,}2,\quad\text{vagyis}\quad \frac{10+10-2\cdot\frac{m}{4}}{2}\cdot\frac{m}{3}\cdot 11{,}2 = 28m.$$

Ebből kapjuk, hogy $11{,}2m^2 - 112m = 0$, amiből $m = 0$ vagy $m = 10$.

Az $m = 0$ esetén az edényben nincs víz.

Az $m = 10$ esetén 280 cm^3 víz van az edényben.