

## I. rész

1. Egy kerékpáros útjának első felét 12 km/h, a másik felét 18 km/h sebességgel tette meg. Visszafelé szeretne egyenletes sebességgel haladni és ugyanannyi idő alatt megtenni az utat, mint odafelé. Mekkora legyen a sebessége? (11 pont)

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész szám párok halmazán:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 4y^2 - 7x + 14y &= 0, \\ xy + x + 2y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13 \text{ pont})$$

3. Az  $AB$  szakaszon vegyünk fel egy  $C$  pontot, amelyre  $AC = x$ ,  $BC = y$ . Az  $AB$  szakasz ugyanazon oldalára megrajzoljuk az  $ACDE$  és a  $CBHG$  négyzetet. A  $DC$  egyenest a  $BE$  egyenes a  $P$  pontban, az  $AH$  egyenes pedig a  $Q$  pontban metszi. Adjuk meg  $x$  és  $y$  ismeretében a  $CQ$  és a  $CP$  szakasz hosszát. (13 pont)

4. Hány darab 1-nél nagyobb, de 2-nél kisebb tagja van az

$$a_n = -1 + \lg(n + 3)$$

sorozatnak?

(14 pont)

## II. rész

5. Koordináta-rendszerben adott az  $A(-1; 4)$  és a  $B(5; 2)$  pont. Adjuk meg az  $x$  tengelyen azt

a) a  $P$  pontot, amelyre  $PA = PB$  és az  $y$  tengelyen azt a  $Q$  pontot, amelyre  $QA = QB$ ; (5 pont)

b) az  $R$  pontot, amelyre  $AR + RB$  minimális; (5 pont)

c) a  $C$  pontot, amelyre  $AC^2 + CB^2$  minimális. (6 pont)

6. a) Két szabályos dobókockával dobunk, a citromsárgával dobott érték legyen  $c$ , a narancssárgával dobott pedig legyen  $n$ . Mekkora a valószínűsége annak, hogy a  $cx^2 = n$  egyenletnek két egész gyöke lesz? (8 pont)

b) Három szabályos dobókockával dobunk, a pirossal dobott érték legyen  $p$ , a fehérrel dobott legyen  $f$ , a zölddel dobott pedig legyen  $z$ . Mekkora a valószínűsége annak, hogy a  $px^2 + fx + z = 0$  egyenletnek két különböző gyöke lesz és ezek egymás reciprokai? (8 pont)

7. a) Mutassuk meg, hogy az  $y = x^3 + (a - 3)x^2 - 3x + 2$  görbesereg minden tagja egy ponton megy át. Adjuk meg ennek a fixpontnak a koordinátáit. (6 pont)

b) Hogyan kell megválasztani az  $a$  paraméter értékét, hogy a hozzá tartozó görbe  $x_0 = 3$  pontjában húzott érintője áthaladjon a  $(0; 2)$  ponton? (10 pont)

8. Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara 2, a befogókhoz hozzáírt köreinek sugara 3 és 10. Mekkora az átfogóhoz hozzáírt kör sugara? (16 pont)

9. Az origó középpontú 13 sugarú körvonalra illeszkedő 12 darab rácspont (olyan pont, amelyek mindkét koordinátája egész szám) meghatároz egy tizenkétszöget.

a) Az így kapott síkidom érintőtizenkétszög? (5 pont)

b) Számítsuk ki a tizenkétszög területét. (7 pont)

c) Legyen egy 13 magasságú egyenes gúla alaplapja ez a tizenkétszög. Mekkora szöveget zárnak be az oldallapok az alaplappal? (4 pont)