I. rész

1. Tóni bácsi a péceli sportpályán pogácsát és perecet árult. A pogácsán 25%, a perecen 60% haszna volt. Egy alkalommal ugyanannyi pogácsát adott el, mint perecet, így 50% haszonra tett szert. Másnap viszont kétszer annyi pogácsát adott el, mint perecet.

a) Hány százalék volt ekkor a haszna? (*8 pont*)

b) Később Tóni bácsi kínálatát bővítette gumicukorral és muffinnal. Endre a szurkoláshoz három terméket vásárol. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha egyféle termékből többet is vehet? (*4 pont*)

2. Az U2CK3 bolygón egy hónap 41 napból áll. A helyiek szerint az összes nap alkalmas a három nemes tevékenység (repülés, tanulás, főzés) közül legalább az egyikre. Mindhárom nemes tevékenységre a hónapban csak három nap alkalmas. A repülésre alkalmas napok száma 19, a tanulásra alkalmas napok száma 23, a főzésre alkalmas napok száma 19.

a) A hónap azon napjainak száma, amelyek csak repülésre és főzésre, amelyek csak repülésre és tanulásra, illetve amelyek csak tanulásra és főzésre alkalmasak, egy 2 hányadosú mértani sorozat három egymást követő elemei. Hány olyan nap van a hónapban, amely csak egy nemes tevékenységre alkalmas? (*6 pont*)

b) Ha a 41 nap közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat, akkor mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom nap csak főzésre alkalmas? (*6 pont*)

3. *a*) Végezzük el a következő integrálást:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\, dx. \qquad (8\ pont)$$

b) Határozzuk meg

$$f(x) = (x^2+3)(x^3+2x-1)$$

differenciálhányados függvényét. (*5 pont*)

4. *a*) Ábrázoljuk a következő hozzárendeléssel megadott függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4, & \text{ha } x \geq 0, \\ \dfrac{x^2-5x}{x^2-x-20}, & \text{ha } x < 0 \text{ és } x \neq 4. \end{cases} \qquad (8\ pont)$$

b) Legyen k egy valós szám. Hány zérushelye van a $g(x) = f(x) - k$ függvénynek? (*6 pont*)

II. rész

5. Egy építőmérnök feladata egy szökőkút tervezése és építtetése. A telket nyugatról egy fal, délről egy sövény határolja, a fal és a sövény egymásra merőlegesen helyezkednek el. A telken áll egy szilvafa a faltól és a sövénytől egyaránt 7 m-re, egy cseresznyefa a faltól 5 a sövénytől 3 m-re és egy szobor a faltól 18 és a sövénytől 9 m-re. A szökőkutat úgy kell elhelyeznie, hogy a fáktól egyenlő távolságra legyen, és a szökőkút kétszer olyan messze legyen a szobortól, mint a cseresznyefától.

a) Milyen messze épül a szökőkút a szobortól? (*11 pont*)

b) A szökőkút építéséhez tartozó földmunka elvégzésével Ede 10, Béla 12 óra alatt végezne. Béla reggel 7 órakor hozzáfog a munkához, egy óra múlva csatlakozik hozzá Ede, egy alkalommal fél óra szünetet tartanak, majd együtt dolgoznak a munka befejezéséig. Hány órakor végeznek? (*5 pont*)

6. Egy számtani sorozatban az első és a negyedik tag reciprokának összege 5,5. A sorozat első, második és hatodik tagja egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Adjuk meg a számtani sorozat első tagját és a differenciáját. (*16 pont*)

7. Két dobókockát feldobunk. Legyen X a két dobott szám különbségének abszolútértéke.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy X négyzetszám? (*6 pont*)

b) Ábrázoljuk az X valószínűségi változó eloszlását. (*5 pont*)

c) Határozzuk meg X várható értékét. (*5 pont*)

8. Az ABC háromszög oldalainak hossza: $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm.

a) Határozzuk meg a háromszög A csúcsából induló s_a súlyvonalának és a c oldalhoz tartozó f_c szögfelezőjének hosszát. (*8 pont*)

b) Határozzuk meg a háromszög beírt és köré írt körének sugarát. (*8 pont*)

9. Egy húrtrapéz alapú egyenes hasáb alakú edényben víz van. A trapéz párhuzamos oldalai 4 cm és 10 cm, szárai 5 cm, a test magassága 11,2 cm hosszú. Ha a testet a trapéz alakú oldallapjáról a legnagyobb területű oldallapjára fordítjuk, akkor az edényben levő víz magassága a harmadára változik. Határozzuk meg az edényben levő víz térfogatát. (*16 pont*)