Elméleti feladatok

1. Egy α hajlásszögű lejtő l hosszúságú. A lejtő tetejére egy kisméretű hasábot helyezünk, amit kezdősebesség nélkül elengedünk. A hasáb és a lejtő felszíne között a csúszási súrlódási együttható $\mu < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$.

a) Határozzuk meg, hogy mennyi idő alatt éri el a lejtő alját a test!

b) Határozzuk meg, hogy mekkora sebességgel éri el a lejtő alját a test!

Ezután a lejtő felületén úgy változtatunk, hogy a súrlódási együttható 0 értékről indulva, a lejtő hossza mentén egyenletesen növekedve, a lejtő alján 2μ értéket érjen el.

c) Az előző esethez képest hosszabb vagy rövidebb idő alatt éri el a test a lejtő alját?

d) Az előző esethez képest kisebb vagy nagyobb sebességgel éri el a test a lejtő alját?

e) Határozzuk meg, hogy ebben az esetben mennyi idő alatt éri el a test a lejtő alját!

f) Határozzuk meg, hogy ebben az esetben mekkora sebességgel éri el a test a lejtő alját!

Ezt követően megfordítjuk a lejtő felületét alkotó lemezt, tehát most a lejtő tetején a súrlódási együttható 2μ, ami a lejtő hossza mentén egyenletesen 0 értékre csökken.

g) Az előző két esethez képest hosszabb vagy rövidebb idő alatt éri el a lejtő alját a test?

h) Az előző két esethez képest kisebb vagy nagyobb sebességgel éri el a lejtő alját a test?

i) Határozzuk meg, hogy ebben az esetben mennyi idő alatt éri el a lejtő alját a test!

j) Határozzuk meg, hogy ebben az esetben mekkora sebességgel éri el a lejtő alját a test!

A számításokat végezzük el paraméteresen! Határozzuk meg a numerikus végeredményeket is a következő adatok segítségével: $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, $\alpha = 30^\circ$, $l = 1$ m, $\mu = 0{,}2$.

Abban az esetben, ha valaki úgy érzi, hogy a paraméteres számolás túlságosan hosszú vagy reménytelenül nehéz számára, arányosan csökkentett pontszámért számolhat numerikusan is.

2. A világűr egy távoli részén, ahol még a gravitáció is elhanyagolható, ámde a vákuum tökéletes, egy M tömegű, egyik végén zárt, másik végén nyitott henger alakú tartály található. A henger közepén egy m tömegű, elhanyagolható vastagságú dugattyú osztja két egyenlő részre a henger térfogatát. A henger elzárt részében n mól egyatomos gáz van, melynek moláris tömege M_0 és hőmérséklete T. Amint feloldjuk a dugattyú rögzítését, a dugattyú súrlódásmentesen elhagyja a hengert.

a) Mekkora a tartály sebessége, amikor a dugattyú a tartály végére ér?

Ebben a pillanatban a dugattyú leválik a rendszerről, és a továbbiakban a dugattyúval nem kell foglalkoznunk. Ezt követően a gáz is elhagyja a tartályt.

b) Közelítő számítás segítségével határozzuk meg, hogy mekkora lesz a tartály végső sebessége.

Útmutatás az *a*) és a *b*) alkérdések megoldásához: A gáz tömege sokkal kisebb, mint a dugattyú tömege, továbbá a dugattyú tömege kisebb, mint a tartály tömege: $nM_0 \ll m < M$. A gáz, a tartály és a dugattyú között mindenféle hőcserétől eltekinthetünk. Ugyancsak eltekinthetünk a gáz hőmérsékletváltozásától, amikor a gáz a dugattyú kilökődése után elhagyja a tartályt. A számításunkat végezzük el paraméteresen.

c) Adjuk meg számszerűen is a tartály végső sebességét a következő adatok segítségével: $M = 2$ kg, $m = 1$ kg, $n = 2$ mol, $M_0 = 40$ g/mol, $T = 300$ K, $R = 8{,}31$ J/mol $\cdot$ K.

d) Hogyan változik (nő, csökken, nem változik) a gáz entrópiája az *a*) és a *b*) folyamat során?

[1] A versenyen – két fordulóban – összesen 8 elméleti és 3 mérési feladat szerepelt; itt most – terjedelmi okokból – az elméleti problémákat ismertetjük.

3. Egy pozitív és egy ugyanakkora nagyságú negatív ponttöltésből álló alakzatot elektromos dipólusnak nevezünk. A dipólust a negatív töltésből a pozitív töltésbe mutató vektorral, az úgynevezett dipólmomentummal jellemezzük, amit $\boldsymbol{p}$-vel jelölünk. Ha a dipólust alkotó töltések $+q$ és $-q$ értékűek, és a közöttük lévő távolság d, akkor a dipólmomentum nagysága: qd. A dipólust pontszerűnek nevezzük, ha $d \ll r$, ahol r-rel jelöljük a vizsgált jelenségben tipikus távolságokat, amit a dipólus középpontjától mérünk. Helyezzük a koordináta-rendszerünk origóját a dipólus középpontjába, így a dipólus körüli tér tetszőlegesen megválasztott pontját az $\boldsymbol{r}$ helyvektorral jellemezzük.

a) Határozzuk meg a pontszerűnek tekinthető, $\boldsymbol{p}$ dipólmomentumú dipólus körül az elektromos potenciál értékét egy tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pontban! A potenciált fejezzük ki a dipólmomentumtól mért r távolság, a dipólmomentum p abszolút értéke, valamint a $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{r}$ vektorok közötti α szög segítségével! (Ismeretes, hogy a vákuum ε_0 dielektromos állandója a következő módon fejezhető ki a Coulomb-törvényben szereplő $k = 9 \cdot 10^9 \ \dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$ állandóval: $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.)

Tekintsük a rögzített, pontszerű elektromos dipólus szimmetriasíkját. (A $\boldsymbol{p}$ dipólmomentum merőleges erre a síkra.) Helyezzünk el egy Q ponttöltést ezen a síkon a dipólustól $r \gg d$ távolságban.

b) Mekkora erő hat a ponttöltésre? A választ p, r és Q segítségével fejezzük ki!

A pontszerű dipólust továbbra is tartsuk rögzítve, azonban a dipólus szimmetriasíkjában nyugvó Q ponttöltést kezdősebesség nélkül engedjük szabadon mozogni. A ponttöltés tömege olyan kicsi, hogy a gravitációs erőtől eltekinthetünk. A kísérletet elvégezve azt tapasztaljuk, hogy a ponttöltés körpályán mozog.

c) Bizonyítsuk be elméletileg, hogy a ponttöltés pályája kör! (A bizonyításhoz nem szükséges a ponttöltés mozgásegyenletét megoldanunk.)

d) A szabadon engedett ponttöltés megáll-e valahol a körpályán? Ha igen, adjuk meg az elengedést követő első megállás helyét!

4. Vizsgáljunk egy vékony, $2l$ hosszúságú fémrudat, például bicikli küllőt. A küllőt forgassuk meg a középpontján átmenő, a hosszára merőleges tengely körül ω szögsebességgel. Helyezzük a küllőt a forgástengellyel párhuzamos B indukciójú, homogén mágneses térbe.

a) Milyen elektrosztatikus mező alakul ki a küllő belsejében, ha a küllőt viszonylag lassan forgatjuk, ezért az elektronok tehetetlenségéből adódó járuléktól eltekinthetünk?

b) Milyen elektrosztatikus mező alakul ki a küllő belsejében, ha a forgás gyorsabb, ezért nem hanyagolhatjuk el az elektronok tehetetlenségéből adódó járulékot?

c) Milyen térfogati töltéseloszlás jön létre a küllő belsejében, ha a küllőt viszonylag lassan forgatjuk, ezért az elektronok tehetetlenségéből adódó járuléktól eltekinthetünk?

d) Milyen térfogati töltéseloszlás jön létre a küllő belsejében, ha a forgás gyorsabb, ezért nem hanyagolhatjuk el az elektronok tehetetlenségéből adódó járulékot?

e) Mekkora szögsebesség esetén képzelhető el, hogy a töltéssűrűség a küllő bizonyos pontjaiban nulla legyen?

f) Ilyen szögsebesség esetén határozzuk meg a küllő összes nulla töltéssűrűségű pontjának a henger szimmetriatengelyétől mért távolságát!

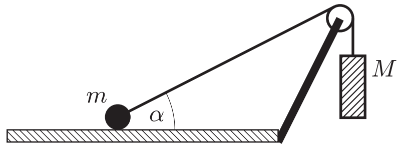
g) Ha az előző két kérdésre sikerült válaszolnunk, akkor válasszunk ki egy ilyen pontot, és számítsuk ki számszerűen azt a szögsebességet, amely nulla töltéssűrűséget eredményez! Numerikus adatok: $B = 3 \cdot 10^{-5}$ T (a földi mágneses tér), a küllő hossza $2l = 30$ cm, $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Ezek után oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy nem küllőt, hanem egy R sugarú fémhengert forgatunk meg az alkotóival párhuzamos szimmetria tengelye körül. A szögsebesség legyen olyan lassú, hogy az elektronok tehetetlenségéből adódó járuléktól eltekinthetünk.

h) Ugyanolyan térfogati töltéseloszlás jön létre a hengerben, mint amilyet a *c*) kérdésre adott válaszban kaptunk?

i) Ha az előző alkérdésre adott válaszunk igen, akkor bizonyítsuk az állításunkat! Ha az előző alkérdésre adott válaszunk nem, akkor számítsuk ki, hogy milyen lesz a hengerben kialakuló térfogati töltéssűrűség!

5. feladat: Az *ábrán* látható összeállításban a csiga tehetetlensége és a súrlódás elhanyagolható. A rendszert nyugalmi helyzetből indítjuk. Határozzuk meg, hogy milyen α szögek esetén emelkedik fel a m tömegű test a vízszintes asztalról közvetlenül az elindítás után! Vizsgáljuk meg a $M \gg m$ esetet is, és mondjuk meg, hogy nevezzük ebben a határesetben a $\sin \alpha_{\text{határ}}$ számot!



6. feladat: Az A és a B jelű folyadékok nem oldódnak egymásban. Telített gőznyomásukat (amit így jelölünk: p_i, ahol $i =$ A vagy B) jó közelítéssel a következő összefüggéssel írhatjuk le:

$$\ln (p_i/p_0) = \frac{\alpha_i}{T} + \beta_i; \quad i = \text{A vagy B},$$

ahol p_0 jelöli a normál légköri nyomást, T a gőz abszolút hőmérsékletét, továbbá α_i és β_i ($i =$ A vagy B) a folyadéktól függő állandók.

A p_i/p_0 arány értékét 40 °C és 90 °C hőmérsékletek esetén az *1. táblázat* tartalmazza az A és B folyadékra:

1. táblázat

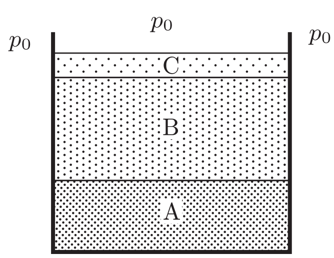
t [°C]	p_i/p_0	
	$i =$ A	$i =$ B
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

Ezeknek az értékeknek a hibái elhanyagolhatóak.

A. Határozzuk meg az A és B folyadék forráspontját p_0 nyomás esetén!

B. Az A és B nem-keveredő folyadékot rétegezve egy edénybe öntjük, amint ez az *1. ábrán* látható. A B folyadék felszínét a C jelű nem-párolgó folyadék vékony rétegével borítjuk be, amely nem oldódik sem az A, sem a B folyadékban, illetve ez megfordítva is igaz, az A és a B folyadék sem oldódik C-ben. Ezzel megakadályozzuk a B folyadék felső felszínéről történő bármiféle szabad párolgást. Az A és a B folyadék moláris tömegének aránya:

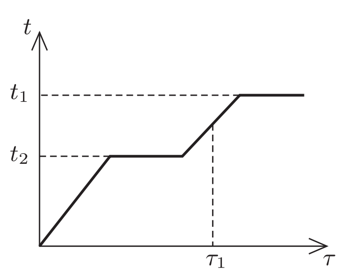
$$\gamma = \mu_A/\mu_B = 8.$$



1. ábra

Az A és a B folyadék tömege kezdetben megegyezik, mindkettő $m = 100$ g. A folyadékszintek magassága az edényben, illetve a folyadékok sűrűsége elegendően kicsiny ahhoz, hogy jó közelítéssel úgy tekinthetjük, az edény belsejében minden pontban a nyomás megegyezik a p_0 normál légköri nyomással.

A folyadékokból álló rendszert lassan, folyamatosan és egyenletesen melegítjük. A folyadékok thőmérsékletének változását a τ idő függvényében a *2. ábra* mutatja vázlatosan.



2. ábra

Határozzuk meg a t_1 és t_2 hőmérsékleteket, melyek a grafikon vízszintes szakaszaihoz tartoznak, továbbá számítsuk ki az A és B folyadék tömegét a τ_1 időpontban. A hőmérsékleteket kerekítsük (°C-ban) a legközelebbi egész értékre, a folyadékok tömegét pedig adjuk meg tized-gramm pontossággal!

Megjegyzés: Tételezzük fel, hogy a folyadékok gőzeire jó közelítéssel

(1) teljesül a Dalton-törvény, ami azt állítja, hogy a keverék gázok nyomása megegyezik a keveréket alkotó gázok parciális nyomásainak összegével, továbbá

(2) a folyadékok gőzeit ideális gázként kezelhetjük a feladatban előforduló nyomások esetén.

($0\ ^\circ\mathrm{C} = 273{,}15$ K.)

7. feladat: Az m_1, m_2 és m_3 különböző tömegű tömegpontok a P_1, P_2 és P_3 nem egy egyenesbe eső pontokban helyezkednek el. A három tömegpont csak a gravitációs erőkkel hat kölcsön egymással; mindentől távol, az üres térben vannak, más testekkel nincs kölcsönhatásuk. Jelölje σ a három tömegpont tömegközéppontján átmenő tengelyt, amely merőleges a $P_1P_2P_3$ háromszögre. Milyen feltételeknek kell teljesülniük a rendszer σ tengely körüli ω szögsebességére, továbbá a

$$P_1P_2 = a_{12}, \quad P_2P_3 = a_{23}, \quad P_1P_3 = a_{13},$$

távolságokra, hogy a $P_1P_2P_3$ háromszög alakja és mérete a rendszer mozgása közben ne változzon, vagyis milyen feltételek esetén fog a rendszer a σ tengely körül merev testként forogni?

8. feladat: Ez a feladat egy elektronmikroszkóp protonmikroszkóppá történő átalakításának vizsgálatával foglalkozik. A vizsgált elektronmikroszkópban az $U = 511$ kV feszültséggel gyorsított elektronnyalábot mágnesesen vezérlik. Az átalakított protonmikroszkópban a protonnyalábot $-U$ feszültség gyorsítja. A feladatban a következő két problémát kell megoldanunk:

A. Egy elektron, miután elhagyja az elektronágyút, vagyis azt az eszközt, amely U feszültséggel gyorsította, egy olyan térrészbe érkezik, ahol a $\boldsymbol{B}$ mágneses mező inhomogén. A mágneses mezőt az $L_1, L_2, \ldots, L_n$ stacionárius (időben nem változó) tekercsrendszer állítja elő, melyek áramai rendre $i_1, i_2, \ldots, i_n$ értékűek.

Milyenek legyenek az $i'_1, i'_2, \ldots, i'_n$ áramok az $L_1, L_2, \ldots, L_n$ tekercsekben, hogy az előzőleg $-U$ feszültséggel gyorsított proton ugyanazt a pályát fussa be, mint az elektron?

Útmutatás. A feladatot meg lehet oldani úgy, ha találunk egy feltételt, melynek teljesülése esetén a pályát leíró egyenlet mindkét esetben ugyanaz. Segítségünkre lehet a következő összefüggés használata:

$$\boldsymbol{p}\,\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{p}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,p^2.$$

B. Hányszorosára növekedne vagy csökkenne a fenti mikroszkóp felbontóképessége, ha az elektronnyalábot protonnyalábra cseréljük? Tegyük fel, hogy a mikroszkóp felbontóképessége (vagyis két pontszerű tárgy közötti legkisebb távolság, amit meg tudunk különböztetni) csak a részecskék hullámtulajdonságaitól függ.

Feltételezhetjük, hogy az elektronok és a protonok gyorsítás előtti sebessége zérus, továbbá, hogy az elektronok és a protonok saját mágneses nyomatéka és a mágneses mező között nincs kölcsönhatás. Tegyük fel azt is, hogy a mozgó részecskék elektromágneses sugárzása elhanyagolható.

Adatok:

Az elektron nyugalmi energiája: $E_\mathrm{e} = m_\mathrm{e}c^2 = 511$ keV,

A proton nyugalmi energiája: $E_p = m_\mathrm{p}c^2 = 938$ MeV.

($1\ \mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.)