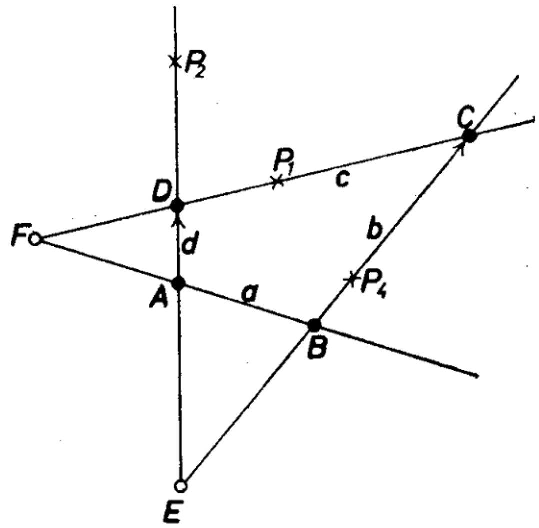
I. megoldás. Jelöljük a BC, DA egyenesek metszéspontját E-vel, AB, CD metszéspontját F-fel, és tegyük fel, hogy E az AB, F az AD egyenes C-vel ellentétes oldalán jön létre. Ez utóbbi feltevésnek nincs jelentősége, hiszen a feladat állításában a négyszög csúcsai egyenrangú szerepet játszanak.



Legyen továbbá

$$a=\frac{AB}{FB},\qquad b=\frac{BC}{EC},\qquad c=\frac{CD}{CF},\qquad d=\frac{DA}{DE}.$$

Ha a CDE háromszög területét T-vel jelöljük, akkor

$$2t=\big[1-(1-b)(1-d)\big]T,$$

és az ADP_4 háromszög területe

$$t=\big[1-(1-d)\big]\lambda_4 T,$$

ahol $\lambda_4=\dfrac{EP_4}{EC}$. E két összefüggés alapján λ_4 értéke

$$\lambda_4=\frac{b+d-bd}{2d}.$$

Hasonlóan kapjuk a $\lambda_2=\dfrac{EP_2}{ED}$, $\lambda_1=\dfrac{FP_1}{FC}$ hányadosok értékét:

$$\lambda_2=\frac{b+d-bd}{2b},\qquad \lambda_1=\frac{a+c-ac}{2a}.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy P_1 rajta van a P_2P_4 egyenesen; azt, hogy P_3 is rajta van ezen, hasonlóan láthatnánk be. Mivel P_1 a CD szakaszt $(1-\lambda_1)$:(λ_1+c-1) arányban osztja,

$$\overrightarrow{EP}_1=\frac{1-\lambda_1}{c}\overrightarrow{ED}+\frac{\lambda_1+c-1}{c}\overrightarrow{EC}=\frac{1-\lambda_1}{c\lambda_2}\overrightarrow{EP}_2+\frac{\lambda_1+c-1}{c\lambda_4}\overrightarrow{EP}_4.$$

Ismeretes, hogy P_1 akkor és csakis akkor van rajta a P_2P_4 egyenesen, ha itt az együtthatók összege 1. Eszerint azt kell megmutatnunk, hogy

$$(1-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)+c\lambda_2(1-\lambda_4)=0.$$

Behelyettesítve a λ_i arányok értékét, a lehetséges egyszerűsítések után ebből az

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)=1$$

összefüggést kapjuk.

Jelöljük az EFC háromszög területét τ-val. Akkor FBC területe $b\tau$, FAC területe pedig $(1-a)b\tau$. Mivel FAC és EFC egy oldala közös, és a megfelelő magasságok aránya $d:1$, ebből kapjuk, hogy

$$b=\frac{d}{1-a}.$$

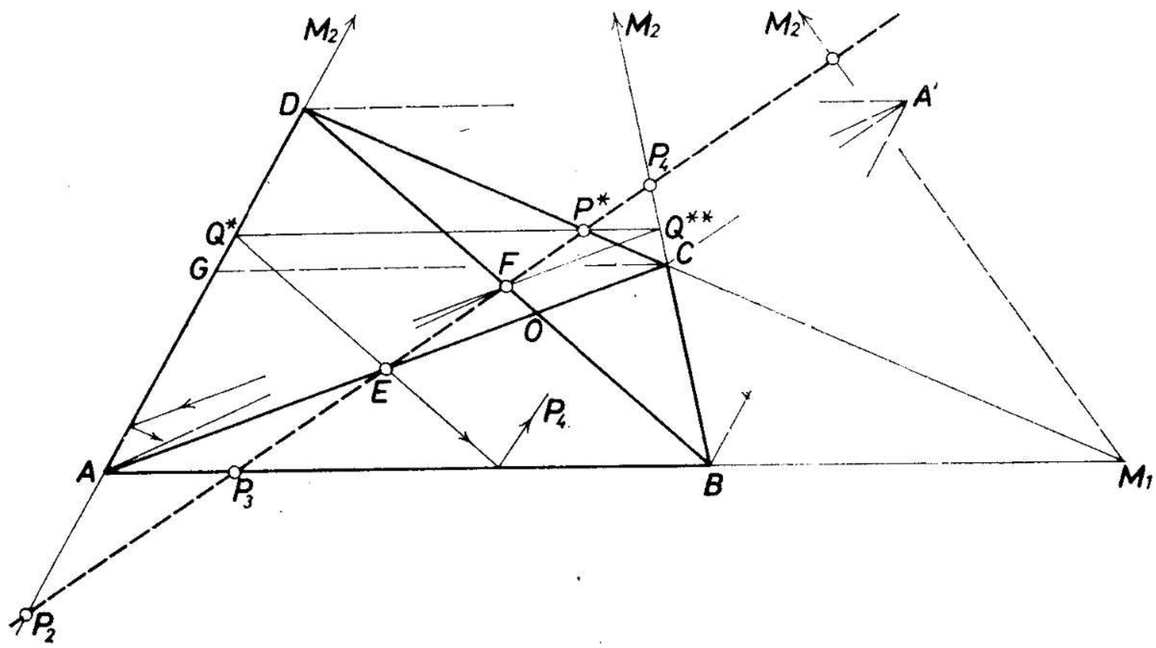
Hasonlóan kapjuk, hogy

$$c=\frac{a}{1-d},$$

és ezeket a bizonyítandó összefüggésbe helyettesítve valóban azonosságot kapunk.

II. megoldás. Próbát téve a nem kizárt négyszögek legszabályosabbikával, a deltoiddal, az állítás szerinti egyenesként az idom tengelye adódik, két-két P pont egybeesik a tengely végpontjaival. Ezt találjuk a ferdén szimmetrikus négyszögnél is, ti. amelyben az egyik átló felezi a másikat. Azt sejtjük további vázlatokból is, hogy a kérdéses egyenes felezi az átlókat (és még a szemben fekvő oldalegyenes-párok metszéspontjai közti szakaszt is). Megfordítva azt fogjuk bizonyítani, hogy a P_i pontokat ($i = 1, 2, 3, 4$) az átlók felezőpontjaival meghatározott egyenes metszi ki az oldalegyenesekből. Ez az egyenes egyértelműen meg van határozva, hiszen a kiindulás kizárta a vizsgálatból a paralelogrammákat. Még trapézokra sem vonatkozik az állítás, így mindegyik P egyértelmű létezése is biztos, hiszen ha pl. az AB és CD egyenesek metszéspontja M, és egy P pont az MC félegyenesen fut, eközben az ABP háromszög területe minden pozitív értéket fölvesz.

A bizonyítást lényegében csak P_1-re végezzük el, és a szemléletesség érdekében ehhez igazítjuk a csúcsok betűzését. Legyen az átlók metszéspontja O, ez egyik átlót se felezze (hiszen már láttuk azt az esetet, ha az egyiket felezi), az átlók nagyobbik darabjának végpontja A, ill. D, így a sejtésünk szerinti egyenes AB-n és DC-n át lép ki a négyszögből, az utóbbiról mutatjuk meg, hogy ez a P_1.



A sejtésünktől függetlenül abból az észrevételből kaphatjuk meg P_1-et, hogy a BED töröttvonal két egyenlő területű részre vágja a négyszöget: meghúzzuk E-n át a párhuzamost BD-vel AD-nek Q pontjáig (A és D között), innen pedig AB-vel haladunk párhuzamosan a CD-vel való metszéspontig. Ekkor ugyanis a területekre

$$\begin{aligned}(1)\qquad ABP_1 =& ABQ = BDA - BDQ = BDA - BDE = ABED = AEB + AED = \\ &= \frac{ACB}{2} + \frac{ACD}{2} = \frac{1}{2}ABCD = t.\end{aligned}$$

Ennek megfordítását járjuk végig a bizonyításban: EF és CD közös P^* pontjából visszafelé szerkesztjük Q^*-ot: $Q^*P^* \parallel AB$, és belátjuk, hogy $Q^*E \parallel BD$. Ennek során P^* és Q^* helyzetét előbb szakaszok arányával jellemezzük, majd ezekből áttérünk alkalmas háromszögek területeinek arányára. Legyen még A-nak F-re való tükörképe A', továbbá messe a C-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes AD-t G-ben. Így $ABA'D$ paralelogramma és $CA' = 2 \cdot EF$, párhuzamosak is; e két szakasszal szorozzuk alább a nevezőt, ill. a számlálót. Szerkesztéseink szerint egyrészt

$$\frac{Q^*D}{GD} = \frac{P^*D}{CD} = \frac{2 \cdot P^*D \cdot EF}{CD \cdot CA'} = \frac{2 \cdot DFE}{DA'C} = \frac{DBE}{DA'G}.$$

(P^*D és CD nem magasságok e háromszögekben az EF, ill. CA' alaphoz képest, de arányosak a megfelelő magasságokkal, mert egyenlő szöggel hajlanak azokhoz. Ezzel használtuk ki, hogy P^* az EF egyenesen van.) Másrészt hasonlóan

$$\frac{DG}{DA} = \frac{DA'G}{DA'A} = \frac{DA'G}{DBA},$$

végül e kettőt összeszorozva GD kiesik:

$$\frac{DQ^*}{DA} = \frac{DBQ^*}{DBA} = \frac{DBE}{DBA}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy Q^* és E valóban egyenlő távolságra vannak DB-től.

Megkaphattuk volna P_1-et F-ből kiindulva is, F-ből AC-vel párhuzamosan haladunk BC-nek Q^{**} pontjáig és onnan ismét AB-vel párhuzamosan. Ábránkon Q^{**} a BC oldal meghosszabbításán van – hiszen Q^*Q^{**} a P^*-nál kilép a négyszögből. A további P_i pontok ($i = 2, 3, 4$) eseteinek előkészítéséül fölírjuk (1) módosulását ebben a változatban:

$$ABP^* = ABQ^{**} = ACB + ACQ^{**} = ACB + ACF = ABCF =$$
$$= BFA + BFC = (BDA + BDC)/2 = ABCD/2 = t.$$

A hasonló meggondolások nem a P_i helyzete szerint alakulnak az első vagy az újabb mintára, hanem a Q-típusú segédpont helyzete szerint. Ahogyan a P_i pontok közül csak kettő lehet magán a négyszög kerületén, ugyanúgy a segédpontok közül is, akár az E-n átmenő, BD-vel párhuzamos egyenes révén szerkesztjük őket, akár az F-en átmenő, AC-vel párhuzamos révén.