

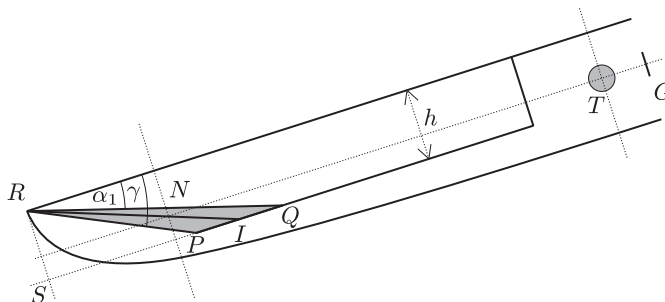
1. feladat. „Vízrel hajtott rizshántoló mozsár”

1. A mozsár felépítése

1.1. A TG távolság kiszámítása. A kanálban összegyűlt 1 liter víz forgatónyomatéka egyensúlyt tart az emelőrúd súlyából származó forgatónyomatékkal. Geometriai megfontolásokból kiszámíthatjuk, hogy 1 liter víz esetén a kanálban a vízmagasság 1,2 cm, és ennek a vízmennyiségnek a súlypontja nagyjából 47 cm-re van a T forgástengelytől. Mivel az emelőrúd tömege 30-szor nagyobb 1 liter víz tömegénél, így a kérdéses TG távolság

$$\frac{47}{30} \text{ cm} = 1,57 \text{ cm} \approx 1,6 \text{ cm}.$$

1.2. Az α_1 és α_2 értékek kiszámítása. Amikor az emelőrúd α_1 dőlésszögénél a víz eléri a kanál peremét, akkor az 1. ábrán látható helyzetet veszi fel. Ekkor a kanálban lévő 1 liter víz egy háromszög alapú egyenes hasábot tölt ki, melynek térfogatát könnyen felírhatjuk: $V = \frac{hb(PQ)}{2} = 1$ liter, ahol $b = 15$ cm a kanál szélessége. A számítás $PQ \approx 11,1$ cm eredményre vezet.



1. ábra

Az emelőrúd α_1 dőlésszögét így számíthatjuk ki:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{SQ} = \frac{h}{PQ + \sqrt{3}h},$$

amiből $\alpha_1 = 20,6^\circ$.

A kanálból akkor távozik az összes víz, ha az emelőrúd dőlésszöge: $\alpha_2 = \gamma = 30^\circ$.

1.3. A nulla forgatónyomatékhoz tartozó β szög és m_1 víztömeg kiszámítása. Használjuk újra az előző ábrát, és ahol csak lehet, írjuk be a képletekbe a numerikus értékeket. Jelöljük a PQ távolságot x -szel, amit mérjünk méterben: $PQ = x$ (m), amivel így adhatjuk meg a kanálban maradó víz m tömegét kilogrammban: $m = \rho_{\text{víz}} \frac{xhb}{2} = 9x$ (kg). A víz súlypontja a PQR háromszög súlypontjában van, az RI súlyvonal $2/3$ részénél. A szerkezet geometriai elrendezéséből következik, hogy az emelőrúd G súlypontja, a T forgástengely (középpontja) és a kanálban maradó víz N súlypontja egy egyenes mentén helyezkedik el. A forgatónyomaték egyensúlyt így írhatjuk fel:

$$mg \cdot TN = Mg \cdot TG \Rightarrow m \cdot TN = M \cdot TG = 30 \cdot 0,0157 = 0,471 \text{ (kgm)}.$$

A TN távolságot így írhatjuk fel:

$$TN = L + a - \frac{2}{3} \left(\sqrt{3}h + \frac{x}{2} \right) = 0,94 - 0,08\sqrt{3} - \frac{x}{3} = 0,801 - \frac{x}{3}.$$

Az eddig meghatározott három kifejezésből ($m = 9x$; $TN = 0,801 - \frac{x}{3}$; $m \cdot TN = 0,471$) a következő másodfokú egyenletre juthatunk: $3x^2 - 7,21 + 0,471 = 0$, melynek számunkra értelmes gyöke: $x = 0,0672$. Így a kérdéses tömeg: $m = 9x = 0,605$ kg, továbbá a dőlési szöget így határozhatjuk meg:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{x + \sqrt{3}h} = 0,436, \quad \text{amiből} \quad \beta = 23,6^\circ.$$

2. A rendes munkavégző körfolyamat mennyiségei

2.1. A $\mu(\alpha)$ forgatónyomaték függvény ábrázolása az α szög függvényében. Kezdetben ($\alpha = 0$) nincs víz a kanálban. Ekkor az emelőrúdra ható forgatónyomaték:

$$Mg \cdot TG = 30 \cdot 9,81 \cdot 0,0157 = 4,62 \text{ Nm} \approx 4,6 \text{ Nm}.$$

Tekintsük ezt a forgatónyomatékokat negatív előjelűnek, a negatív forgatónyomaték a rúd dőlésszögét csökkenteni igyekeznek. Amikor lassan víz folyik a kanálba, az eredő forgatónyomaték növekedni kezd egészen addig, amíg kissé pozitív válik, és a mozsártörő emelkedni kezd. Ezt követően azzal a közelítéssel dolgozunk, hogy a kanálban lévő víz mennyisége nem változik.

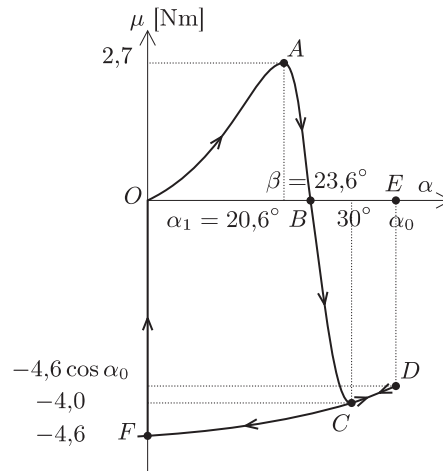
Miközben a kanál lefelé billen, a benne lévő víz tömegközéppontja fokozatosan eltávolodik a forgástengelytől, így μ egészen addig növekszik, amíg a víz eléri a kanál peremét. Tehát a maximális forgatónyomaték az $\alpha = \alpha_1 = 20,6^\circ$ -os dőlésszögnél jön létre. Az előző részben már megismert számoláshoz hasonlóan kiszámíthatjuk, hogy $\mu_{\max} \approx 2,7$ Nm.

A rúd további dőlése közben a víz elkezd kifolyni a kanálból, és $\alpha = \beta$ esetén $\mu = 0$ -vá válik. A tehetetlenség következtében α tovább növekszik, miközben μ csökken. $\alpha = 30^\circ$ esetén a kanál teljesen kiürül. Ebben a helyzetben a forgatónyomaték: $\mu = -Mg \cdot TG \cdot \cos 30^\circ = -4,0$ Nm. Ezután a tehetetlenség következtében a szög még tovább nő, egészen $\alpha = \alpha_0$ értékig, amikor a forgatónyomaték: $\mu = -Mg \cdot TG \cdot \cos \alpha_0 = -4,6 \cdot \cos \alpha_0$ Nm. Végül a dőlésszög hirtelen nullára csökken (a mozsártörő lecsap), és a körfolyamat $\mu = -4,6$ Nm értékkel újra kezdődik.

A fentiek alapján felvázolhatjuk a $\mu(\alpha)$ forgatónyomatékokat az α szög függvényében (2. ábra):

2.2. A mozsártörő munkavégzésének grafikus értelmezése. A $\mu(\alpha)$ forgatónyomaték által végzett W_{teljes} teljes munkavégzést a forgatónyomaték előjeles görbe alatti területeként számíthatjuk ki a teljes $OABCDFO$ körfolyamatra. A mozsártörőnek átadott $W_{\text{ütés}}$ energiát az α_0 -tól 0-ig tekintett görbe alatti terület mérőszámaként kaphatjuk meg ($EDFOE$), melynek nagysága:

$$Mg \cdot TG \cdot \sin \alpha_0 = 4,6 \text{ J} \cdot \sin \alpha_0.$$



2. ábra

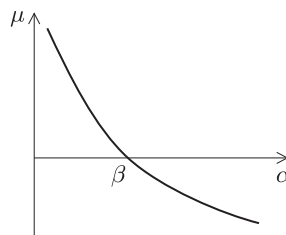
2.3. Az α_0 szög és $W_{\text{ütés}}$ becslése. Az α_0 szög értékét abból becsülhetjük meg, hogy ebben a pozícióban az emelőrúd energiája nulla, vagyis az $OABO$ terület megegyezik a $BEDCB$ terület nagyságával. Ha az $OABO$ területet háromszöggel, a $BEDCB$ területet pedig trapézzal közelítjük, akkor az α_0 szög értékére közelítőleg 35° -ot kapunk. Így a mozsártörő által végzett munka:

$$W_{\text{ütés}} = Mg \cdot TG \cdot \sin \alpha_0 = 4,6 \text{ J} \cdot \sin 35^\circ \approx 2,6 \text{ J}.$$

3. A mozdulatlan állapot

3.1. Az emelőrúd mozgása az $\alpha = \beta$ egyensúlyi helyzet közelében.

3.1.1. Az $\alpha = \beta$ egyensúlyi helyzet közelében a forgatónyomaték nagyjából a 3. ábrán látható módon változik. A grafikon alapján megállapíthatjuk, hogy az egyensúlyi helyzet stabil.



3. ábra

3.1.2. Az α szögben megdőlt rúd esetén a kanálban lévő víz tömege:

$$m = \frac{\rho b h \cdot PQ}{2}, \quad \text{ahol} \quad PQ = h \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan 30^\circ} \right).$$

Miközben a rúd hajlásszöge β -ról $(\beta + \Delta\alpha)$ értékre változik, a kanálban lévő víz tömegének megváltozása közelítőleg:

$$\Delta m = -\frac{bh^2\rho}{2\sin^2\alpha}\Delta\alpha \approx -\frac{bh^2\rho}{2\sin^2\beta}\Delta\alpha.$$

A $(\beta + \Delta\alpha)$ dőlésszögű rúdra ható μ forgatónyomaték megegyezik a Δm tömegből származó nyomatékkal:

$$\mu = \Delta mg \cdot TN \cdot \cos(\beta + \Delta\alpha).$$

A TN távolságot a rúd β szöghöz tartozó egyensúlyi állapotából határozhatjuk meg:

$$TN = \frac{M \cdot TG}{m} = \frac{30 \cdot 0,0157}{0,605} = 0,779 \text{ m.}$$

Végül a forgatónyomatéokra közelítőleg ezt a numerikus kifejezést kapjuk: $\mu \approx -47 \cdot \Delta\alpha$ (Nm).

3.1.3. Alkalmazzuk a rúd mozgására a forgómozgás dinamikai alapegyenletét ($\mu = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}$, ahol $\alpha = \beta + \Delta\alpha$), melyben az I tehetetlenségi nyomaték nem csupán a rúdtól, hanem a kanálban lévő víz tömegétől is függ. Tegyük fel, hogy kicsiny $\Delta\alpha$ szögek esetén a kanálban lévő víz tömege állandó ($\approx 0,6$ kg) és ezt a vízmennyiséget tekintjük tömegpontnak. A számítás a rendszer tehetetlenségi nyomatékára közelítőleg $I \approx 12,4$ kg m²-et ad. Így a mozgásegyenlet numerikus alakja (SI egységrendszerben):

$$-47 \cdot \Delta\alpha = 12,4 \frac{d^2\Delta\alpha}{dt^2},$$

ami egy harmonikus rezgőmozgás egyenlete. A mozgás rezgésideje:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{12,4}{47}} \approx 3,2 \text{ s.}$$

3.2. A vízhozam számítása kis amplitúdójú rezgés esetén. Az emelőrúd szögkitérésének időfüggését így írhatjuk fel az egyensúlyi helyzet körül:

$$\Delta\alpha = -\Delta\alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right), \quad \text{ahol } \Delta\alpha_0 = 1^\circ.$$

Ilyenkor a rúd a $t = 0$ kezdőpillanat után a kisebb szögkitérések felé indul el, és ott nagyobb vízmennyiségre van szükség a túlfolyás elérésére. Rövid dt idő alatt a rúd lehajlása $d\alpha$ szöggel változik meg:

$$d(\Delta\alpha) = d\alpha = -\Delta\alpha_0 \frac{2\pi}{\tau} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \cdot dt.$$

A túlfolyáshoz ennyi idő alatt legalább a következő mennyiségű víznek kell a kanálba csorognia:

$$dm = -\frac{bh^2\rho}{2\sin^2\beta} d\alpha = \frac{2\pi\Delta\alpha_0 bh^2\rho}{2\tau \sin^2\beta} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) dt.$$

Ennek maximuma $t = 0$ -nál van, vagyis a túlfolyás akkor lesz folyamatos, ha a vízhozamra ($dm = \Phi dt$) teljesül, hogy

$$\Phi \geq \Phi_1 = \frac{\pi bh^2\rho}{\tau \sin\beta} \Delta\alpha_0 = \frac{\pi bh^2\rho}{\tau \sin\beta} \cdot \frac{2\pi}{360} \approx 0,23 \text{ kg/s,}$$

ahol a rezgés 1° -os szögamplitúdóját $\frac{2\pi}{360}$ radián alakban írtuk fel.

3.3. Mekkora minimális vízhozam esetén nem működik a mozsár? Ha a kanál eléri a $20,6^\circ$ -os dőlési szöget, miközben mindvégig túlsordul, akkor benne 1 kg víz lesz, és a rezgési amplitúdója $23,6^\circ - 20,6^\circ = 3^\circ$ -os lesz. Eltekintve a rendszer tehetetlenségi nyomatékának változásától (amit a növekvő vízmennyiség okoz), a háromszoros amplitúdó háromszoros vízhozamot is jelent: $\Phi_2 = 3\Phi_1 \approx 0,7$ kg/s. Ennél nagyobb vízhozam esetén a rizshántoló mozsár nem tud működni.

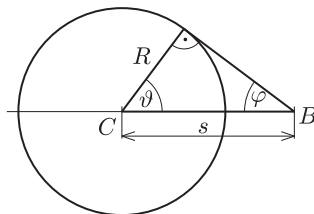
2. feladat. Cserenkov-sugárzás és gyűrűs képződés alapján alapuló számláló

Mialatt a részecske t idő alatt a C pontból $s = vt = t\beta c$ utat megtéve a B pontba ér, a C pontban kibocsátott fény egy $R = t \frac{c}{n}$ sugarú gömböt ér el.

Így a hullámfront a B -ből a gömbhöz húzott érintő kúp, amely

$$\varphi = \arcsin \frac{R}{s} = \arcsin \frac{1}{\beta n}$$

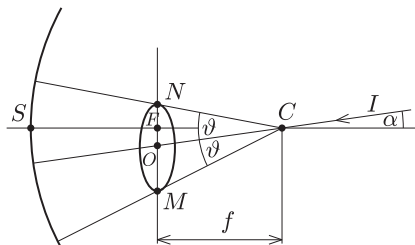
szöget zár be a részecske pályájával.



4. ábra. A hullámfront szerkesztése

Adott irányból párhuzamosan érkező fénysugarakat a homorú gömbtükör a fókuszszíkba képzi. A kép pontos helyét a tükör C geometriai középpontján áthaladó sugármenet metszi ki, amely visszaverődés után szintén keresztülhalad C -n.

Az 5. ábrán felrajzoltuk az optikai tengelyhez képest α , $\alpha + \vartheta$ és $\alpha - \vartheta$ szögben haladó C -n átmenő fénysugarakat, melyek a fókuszszíkot az O , M és N pontban metszik. A tükör által alkotott kép (kis α , ϑ szögek esetén) egy $r = OM = ON = f\vartheta$ sugarú kör, melynek O középpontja $OF = f\alpha$ távolságra esik az F fókuszponttól.



5. ábra. A gyűrűs kép létrejötte

3.1. A $p = \frac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (relativisztikus) impulzus képletéből az M nyugalmi tömeg ismeretében kifejezhető a részecske $\beta = \frac{v}{c}$ dimenziótlan sebessége:

$$(1) \quad \beta = \left(1 + \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \delta, \quad \text{ahol} \quad \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2.$$

Az utolsó közelítés akkor érvényes, ha $\delta \ll 1$. Ez esetünkben jó közelítéssel fennáll mindhárom részecskére:

$$(2) \quad \delta_p = 4,42 \cdot 10^{-3}, \quad \delta_\kappa = 1,25 \cdot 10^{-3}, \quad \delta_\pi = 9,8 \cdot 10^{-5}.$$

A Cserenkov-effektus akkor lép fel, ha a részecske v sebessége nagyobb a közegbeli $\frac{c}{n}$ fénysebességnél, ahol n a törésmutatót jelöli. Határesetben $v = \frac{c}{n_{\min}}$, tehát a minimális törésmutató, amely mellett megfigyelhető a Cserenkov-effektus:

$$n_{\min} = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2} \approx 1 + \delta.$$

A törésmutató ismeretében a kritikus nyomás $P_{\min} = \frac{n_{\min} - 1}{a} = \frac{\delta}{a}$. A számszerű eredmények:

$$P_{\min, \text{proton}} = 16 \text{ atm}, \quad P_{\min, \text{kaon}} = 4,6 \text{ atm}, \quad P_{\min, \text{pion}} = 0,36 \text{ atm}.$$

3.2. A gyűrűk sugara $r = f\vartheta$, ahol a sugárzási kúp ϑ félnyílásszögére a 4. ábra alapján a $\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta}$ egyenlőség teljesül. Most azt az $n_{\frac{1}{2}}$ törésmutatót keressük, amely mellett $2r_\kappa = r_\pi$, azaz $2\vartheta_\kappa = \vartheta_\pi$. Ezek felhasználásával

$$\frac{1}{n_{\frac{1}{2}}\beta_\pi} = \cos \vartheta_\pi = \cos (2\vartheta_\kappa) = 2 \cos^2 \vartheta_\kappa - 1 = \frac{2}{n_{\frac{1}{2}}^2 \beta_\kappa^2} - 1.$$

Az egyenlőség sor első és utolsó eleme a

$$(3) \quad \beta_\pi \beta_\kappa^2 n_{\frac{1}{2}}^2 + \beta_\kappa^2 n_{\frac{1}{2}} - 2\beta_\pi = 0$$

másodfokú egyenletet adja a keresett $n_{\frac{1}{2}}$ törésmutatóra, mely egyszerűen linearizálható, ha észrevesszük, hogy mind $n_{\frac{1}{2}}$, mind β_π és β_κ nagyon kicsit tér el 1-től:

$$(4) \quad \beta_\pi \approx 1 - \delta_\pi, \quad \beta_\kappa \approx 1 - \delta_\kappa, \quad n_{\frac{1}{2}} = 1 + \eta.$$

Ezeket a közelítéseket (3)-ba beírva, és csak az elsőrendű tagokat tartva meg, az adódik, hogy:

$$\eta = \frac{4\delta_\kappa - \delta_\pi}{3} = 1,634 \cdot 10^{-3} \quad \text{és} \quad P_{\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{a} = 6,05 \text{ atm.}$$

Ezen a nyomáson a protonok nem keltenek Cserenkov-sugárzást. A törésmutató ismeretében meghatározható a kaonok és pionok által keltett sugárzási kúp félnyílásszöge:

$$(5) \quad \vartheta_\kappa = \arccos\left(\frac{1}{n_{\frac{1}{2}}\beta_\kappa}\right) \approx \sqrt{2(\eta - \delta_\kappa)} = 2,77 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,6^\circ,$$

$$\vartheta_\pi = 2\vartheta_\kappa = 5,54 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 3,2^\circ.$$

(Ismert, hogy $x \ll 1$ esetén $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Innen $\arccos(1 - y) \approx \sqrt{2y}$, ahol $y = \frac{x^2}{2} \ll 1$. A közelítésnél ezt az összefüggést, valamint a (4) egyenleteket használtuk fel.)

4.1. Az (1) és (5) egyenletek alapján a ϑ félnyílásszög a p impulzus függvényében

$$(6) \quad \vartheta(p) \approx \sqrt{2\eta - \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2}, \quad \text{így} \quad \frac{d\vartheta}{dp} \approx \frac{(Mc^2)^2}{\vartheta \cdot (pc)^3} c.$$

A számértékek behelyettesítése után azt kapjuk, hogy:

$$(7) \quad \frac{d\vartheta_\kappa}{dp} = \frac{9,03 \cdot 10^{-3} \cdot c}{\text{GeV}} = \frac{0,52^\circ \cdot c}{\text{GeV}}, \quad \frac{d\vartheta_\pi}{dp} = \frac{3,54 \cdot 10^{-4} \cdot c}{\text{GeV}} = \frac{0,02^\circ \cdot c}{\text{GeV}}.$$

(A részecskefizikában az impulzus megadására gyakran használják az $\frac{\text{elektronvolt}}{\text{fénysebesség}}$ mértékegységet.)

4.2. A feltételekből az impulzus bizonytalansága:

$$\Delta p < \frac{\vartheta_\pi - \vartheta_\kappa}{10(\vartheta'_\kappa + \vartheta'_\pi)} = 0,3 \frac{\text{GeV}}{c}.$$

5. Adott n törésmutatójú közegben Cserenkov-sugárzás a $v_{\min} = \frac{c}{n}$ sebesség fölött észlelhető. Ennél a sebességnél a mozgási energia:

$$T_{\min} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\min}^2}{c^2}}} - Mc^2 = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) = 0,51 \cdot Mc^2.$$

α -részecskékre, illetve elektronokra ezek az értékek

$$T_\alpha = 0,51 \cdot 3,8 \text{ GeV} = 1,94 \text{ GeV}, \quad T_\beta = 0,51 \cdot 0,51 \text{ MeV} = 0,26 \text{ MeV},$$

ami azt jelenti, hogy elektronok hozták létre a Cserenkov által észlelt sugárzást.

6.1. P nyomáson $\eta = n - 1 = aP$, tehát a látható tartomány két végpontjához tartozó törésmutatók eltérése $\Delta n = \Delta\eta = 0,02 \cdot aP = 3,24 \cdot 10^{-5}$. A keresett $\Delta\vartheta$ szögeltérés a (6) egyenletben felírt ϑ szög η változó szerinti differenciálásával kapható meg:

$$\Delta\vartheta_\pi = \frac{d\vartheta_\pi(\eta)}{d\eta} \Delta\eta = \frac{\Delta\eta}{\vartheta_\pi} = 0,033^\circ.$$

6.2. Az előző pontban láttuk, hogy a diszperzió miatti kiszélesedés félértékszélessége $\frac{\Delta\vartheta_\pi}{2} = 0,017^\circ$. A (7) egyenlet alapján az impulzus-inhomogenitás miatti kiszélesedés

$$\frac{0,02^\circ \cdot c}{\text{GeV}} \cdot \frac{0,3 \text{ GeV}}{c} = 0,006^\circ,$$

ami háromszor kisebb a diszperzióhoz tartozó kiszélesedésnél. Kisebb hullámhosszon a törésmutató nagyobb, tehát a Cserenkov-kúp nyílásszöge szélesebb. Ez azt jelenti, hogy a gyűrű színe kívül kékes, középen fehér, belül pedig vörös.

3. feladat. A levegő hőmérsékletének magasság szerinti változása, a légköri stabilitás és a légszennyeződés

1.1. A z magasságban levő, $\rho(z)$ sűrűségű, A területű, dz vastagságú levegőréteg $A\rho(z)g dz$ súlya megegyezik a levegőréteg alján és tetején mérhető nyomáskülönbségből származó $-A(p(z+dz) - p(z))$ erővel. Felhasználva, hogy $\rho = \frac{\mu p}{RT_0}$, a nyomás magasságtól való függésére a

$$p'(z) = -\frac{\mu g}{RT_0}p(z)$$

differenciálegyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_0}z}.$$

1.2. Az előzőekhez hasonló érveléssel most a $p(z)$ függvényre a

$$p'(z) = -\frac{\mu g}{R(T(0) - \Lambda z)}p(z)$$

(ún. szeparálható) differenciálegyenlet vezethető le, mely a feladatban közölt segítséggel megoldható:

$$\int \frac{dp}{p} = \ln p + C_1; \quad -\frac{\mu g}{R} \int \frac{dz}{T(0) - \Lambda z} = \frac{\mu g}{R\Lambda} \ln(T(0) - \Lambda z) + C_2,$$

ahonnan

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}}.$$

A sűrűség magasságtól való függése:

$$\rho(z) = \frac{\mu p(z)}{RT(z)} = \frac{\mu p_0}{RT(0)} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda} - 1},$$

ami akkor monoton növekedő függvény, ha a kitevő negatív, azaz ha

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = 0,034 \frac{\text{K}}{\text{m}}.$$

Érdemes észrevenni, hogy kis magasságok esetén a nyomás magasságfüggése mind az 1. pontban vizsgált izoterm léggör esetén, mind pedig a most vizsgált lineáris hőmérséklet-eloszlás esetén $p(z) \approx p_0 \left(1 - \frac{\mu g z}{RT(0)}\right)$ alakú. Tehát a léggör hőmérsékletének magassággal való változása „első rendben”, kis magasságok esetén nem befolyásolja a nyomás magasságtól való függését.

2.1. A levegőcsomag állapotváltozása adiabatikus, tehát kielégíti a

$$T_{\text{csomag}} \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{állandó}$$

állapotegyenletet, ahol $T_{\text{csomag}}(z)$ a levegőcsomag hőmérséklete, $p(z)$ pedig a környezet és a levegőcsomag közös nyomása. Mindkét mennyiség függ a z magasságtól. Differenciáljuk az adiabatikus állapotegyenletet z szerint:

$$T'_{\text{csomag}} \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + T_{\text{csomag}} \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \cdot \frac{p'}{p} = 0.$$

Az előző pontban láttuk, hogy $\frac{p'}{p} = -\frac{\mu g}{RT}$, ezt felhasználva kapjuk, hogy:

$$(8) \quad T'_{\text{csomag}} = -G, \quad \text{ahol} \quad G = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_{\text{csomag}}}{T}.$$

2.2. Ha $T_{\text{csomag}} = T$, akkor

$$\Gamma = G|_{T_{\text{csomag}}=T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} = \frac{\mu g}{c_p} = 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{m}},$$

és a hőmérséklet a $T(z) = T(0) - \Gamma z$ módon függ a magasságtól. (Ezt a speciális esetet *adiabatikus léggörnek* hívják.)

2.3. Ha a külső hőmérséklet $T(z) = T(0) - \Lambda z$ függvény szerint változik, akkor az (8) összefüggés szerint a $T_{\text{csomag}}(z)$ függvény a következő differenciálegyenletet elégíti ki:

$$T'_{\text{csomag}}(z) = -\frac{\Gamma}{T - \Lambda z} T_{\text{csomag}}(z).$$

Az 1.2. pontban már megoldottunk egy hasonló differenciálegyenletet ($p(z)$ -re, más konstanssal), így mostani egyenletünk megoldását a megfelelő változók átírásával azonnal megkaphatjuk:

$$(9) \quad T_{\text{csomag}}(z) = T_{\text{csomag}}(0) \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \approx T_{\text{csomag}}(0) - \Gamma z.$$

Az utolsó közelítés $|\Lambda z| \ll T(0) \approx T_{\text{csomag}}(0)$ esetén érvényes, amikor a hatványozás közelítésére használhatjuk az $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ formulát, amely $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes.

Érdeemes észrevenni, hogy a kapott hőmérsékletfüggés megegyezik az adiabatikus légkör esetén kapottal. Ezen nem kell meglepődnünk, ha visszaemlékezünk az 1.2. pont végén kapott eredményünkre, mely szerint a külső nyomás (kis magasságok esetén, „első rendben”) érzéketlen a hőmérséklet magasságfüggésére, a külső hőmérséklet pedig (feltevéseink szerint) nem befolyásolja a levegőcsomag hőmérsékletét.

3.1. A levegőcsomag és a külső levegő nyomása egyensúlyban van, tehát csak hőmérsékletük eltérése okozhat sűrűségkülönbséget. Ha $z > 0$ esetén a külső levegő

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

hőmérséklete kisebb, mint a levegőcsomag

$$T_{\text{csomag}}(z) = T(0) - \Gamma z$$

hőmérséklete, azaz ha $\Lambda > \Gamma$, akkor a kissé felemelkedett levegőcsomag ritkább, mint környezete, tehát tovább emelkedik; a légkör instabil. $\Lambda = \Gamma$ esetén a légkör semleges, míg $\Lambda < \Gamma$ esetén stabil.

3.2. A levegőcsomag addig a h magassáig emelkedik, ahol hőmérséklete megegyezik a külső levegő hőmérsékletével, tehát, felhasználva a (9) egyenletet,

$$T(0) - \Lambda h = T_{\text{csomag}}(0) \left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}.$$

Innen a h magasságra azt kapjuk, hogy:

$$(10) \quad h = \frac{T(0)}{\Lambda} \left(1 - \left(\frac{T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)}\right)^{\frac{\Gamma-\Lambda}{\Gamma}}\right) \approx \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{\Gamma - \Lambda}.$$

Az utolsó közelítés a

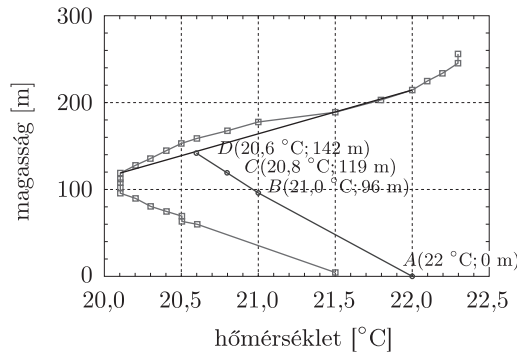
$$T_{\text{csomag}}(0) \approx T(0) \quad \text{és} \quad \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)} \ll 1$$

feltételek mellett érvényes, és a

$$\frac{T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)} = 1 - \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)}$$

átírás után a hatványozás már megismert közelítésével kapható.

4.1. A táblázatból vett adatokat ábrázolva a következő grafikont kapjuk:



6. ábra. A légkör hőmérséklete a magasság függvényében

Ennek megfelelően a légkör három rétegre osztható, a középső réteg izoterm, míg a másik kettőben közel lineárisan változik a hőmérséklet:

1. réteg	$0 \text{ m} < z < 96 \text{ m}$	$\Lambda_1 = \frac{21,5 \text{ K} - 20,1 \text{ K}}{91 \text{ m}} = 15,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$
2. réteg	$96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$	$\Lambda_2 = 0 \frac{\text{K}}{\text{m}}$, izoterm szakasz
3. réteg	$119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$	$\Lambda_3 = \frac{20,1 \text{ K} - 22 \text{ K}}{215 \text{ m} - 119 \text{ m}} = -0,02 \frac{\text{K}}{\text{m}}$

Látható, hogy a (9) egyenlet közelítésénél használt feltételek teljesülnek, így a felemelkedő, és adiabatikusan táguló levegőcsomag hőmérséklete a külső hőmérséklettől lényegében teljesen függetlenül a $\Gamma = 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{m}}$ együttható szerint lineárisan csökken. Így

$$\begin{aligned} T_{\text{csomag}}(96 \text{ m}) &= 22 \text{ }^\circ\text{C} - 0,96 \text{ }^\circ\text{C} \approx 21,0 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{és} \\ T_{\text{csomag}}(119 \text{ m}) &= 22 \text{ }^\circ\text{C} - 1,19 \text{ }^\circ\text{C} \approx 20,8 \text{ }^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

4.2. Látható, hogy 119 m magasan a levegőcsomag hőmérséklete még mindig $0,7 \text{ }^\circ\text{C}$ -kal magasabb, mint környezetéé. Alkalmazva a (10) egyenlet közelítő formuláját, azt kapjuk, hogy a levegőcsomag még további $\frac{0,7}{0,01 + 0,02} \text{ m} = 23 \text{ m}$ -t emelkedik, mire környezetével hőmérsékleti egyensúlyba kerül. Tehát a keverési magasság

$$H = 119 \text{ m} + 23 \text{ m} = 142 \text{ m},$$

és itt a hőmérséklet $T_{\text{csomag}}(H) \approx 20,6 \text{ }^\circ\text{C}$.

5.1. Az $L \times W \times H$ méretű téglatestben levő teljes szén-monoxid mennyiség két tényező miatt változik: egyrészt a motorok által kibocsátott mennyiséggel nő, másrészt a szél által kifújt mennyiséggel csökken. Tehát

$$LWHC'(t) = M - uLHC(t).$$

5.2. A fenti lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek a $C(0) = 0$ kezdőfeltételt kielégítő megoldása:

$$C(t) = \frac{M}{LHu} (1 - e^{-\frac{u}{H}t}).$$

5.3. A fenti egyenletbe behelyettesítve a megadott adatokat, azt kapjuk, hogy a 8 órakor mérhető szén-monoxid koncentráció $C(3600 \text{ s}) = 2,3 \frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$.