Megoldásvázlatok a 2008/7. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Nagy-Baló András
Budapest

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)} = \frac{1}{2}. \qquad (12\ pont)$$

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya:

$$\left.\begin{aligned} 2x-5>0 \\ x^2-8>0 \\ \log_2(x^2-8)\neq 0 \end{aligned}\right\}, \quad \text{azaz} \quad x\in\left]2\sqrt{2};3\right[\cup\left]3;+\infty\right[.$$

Az egyenletet ekvivalens átalakításokkal rendezzük (közben felhasználjuk a 2 alapú logaritmus függvény kölcsönös egyértelműségét is):

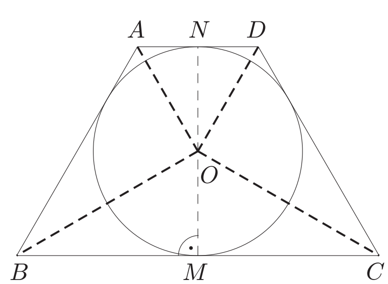
$$\begin{aligned} 2\log_2(2x-5) &= \log_2(x^2-8), \\ \log_2(2x-5)^2 &= \log_2(x^2-8), \\ (2x-5)^2 &= x^2-8, \\ 3x^2-20x+33 &= 0. \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlet gyökei: $x_1=3$ és $x_2=\frac{11}{3}$, amelyek közül az elsőt kizárja az értelmezési tartomány, a második teljesíti az egyenlőséget.

Vagyis az egyenlet egyedüli megoldása: $x=\frac{11}{3}$.

2. *Mekkora annak a* 3 cm *sugarú kör köré írt egyenlőszárú trapéznak a területe, amelynek hegyesszögei* 60°*-osak?* (*12 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit.



Ha a B és a C csúcsnál lévő szögek mértéke 60°, akkor az A és a D csúcsnál lévő szögek 120°-osak. A trapézba írt kör O középpontja a trapéz szögfelezőinek metszéspontja. Így $OBA\sphericalangle=30^\circ$ és $OAB\sphericalangle=60^\circ$.

M és N az alapok felezőpontjai, így BOM derékszögű háromszög, melynek OM oldala a kör sugara. Mivel $OBM\sphericalangle=30^\circ$ és $OM=3$, azért $BO=6$ és $BM=3\sqrt{3}$. Ezért $BC=6\sqrt{3}$.

Hasonló gondolatmenettel az ANO derékszögű háromszögből: $AD=2\sqrt{3}$.

Tudjuk, hogy a trapéz magassága, $MN=6$, ezért:

$$T=\frac{(BC+AD)\cdot MN}{2}=\frac{\left(6\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)\cdot 6}{2}=24\sqrt{3}\approx 41{,}57.$$

Vagyis a trapéz területe kb. 41,57 cm^2.

3. *Ejtőernyősök célba ugrása közben feljegyezték, hogy Berci tíz ugrása közül kilenc alkalommal hány méterre ért földet a középponttól. A feljegyzett adatok méterben:* 1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 9, 7. *Tíz ugrására vonatkozó adatainak* 5 m*-től való átlagos abszolút eltérése* 2,4 m *volt.*

a) *Állapítsuk meg a hiányzó tizedik adatot.*

b) Határozzuk meg a tíz ugrás adataira vonatkozó átlagot, móduszt, mediánt és a szórást. (*13 pont*)

Megoldás. *a*) Jelöljük x-szel a tizedik adat méterben kifejezett értékét. Jelölje a az átlagtól való eltérések összegét:

$$\begin{aligned} a &= |5-1| + |5-2| + |5-3| + |5-4| + |5-5| + \\ &\quad + |5-6| + |5-7| + |5-8| + |5-9| + |5-x| = \\ &= 20 + |5-x|. \end{aligned}$$

Az 5-től való átlagos abszolút eltérés 2,4, vagyis

$$\frac{a}{10} = \frac{20+|5-x|}{10} = 2{,}4, \quad \text{ahonnan} \quad |5-x| = 4.$$

Azaz $x = 1$ vagy $x = 9$.

Tehát a tizedik adat lehetett 1 m és lehetett 9 m is.

b) Berci ugrásaira vonatkozó adatsor kétféle lehet.

1. eset: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ekkor az átlag: 4,6, a módusz: 1, a medián: 4,5, a szórás: 2,73.

2. eset: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9. Ekkor az átlag: 5,4, a módusz: 9, a medián: 5,5, a szórás: 2,73.

4. *Hány nulla áll a* $\binom{100}{50}$ *szám végén?* (*14 pont*)

Megoldás. $\binom{100}{50} = \dfrac{100!}{50! \cdot 50!}$.

$100! = 5^{24} \cdot m$ és $50! = 5^{12} \cdot n$, ahol m és n 5-tel relatív prímszámok, így

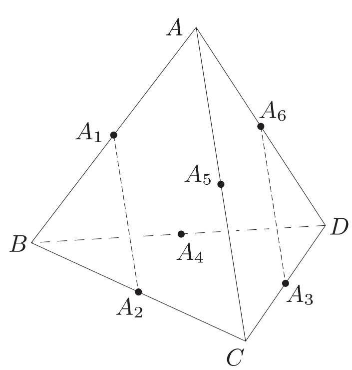
$$\binom{100}{50} = \frac{5^{24} \cdot m}{5^{12} \cdot n \cdot 5^{12} \cdot n} = \frac{m}{n^2}.$$

Tudjuk, hogy $\binom{100}{50}$ természetes szám, viszont $\dfrac{m}{n^2}$ nem osztható 5-tel, így egyetlen nulla sincs $\binom{100}{50}$ végén.

II. rész

5. *Egy tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy létezik olyan gömb, amelyre mind a hat él felezőpontja illeszkedik.* (*16 pont*)

Megoldás. Az *ábra* jelöléseit használjuk. Mivel $A_1A_2 \parallel A_3A_6$ és $A_1A_2 = A_3A_6 = \frac{1}{2}AC$ (mindkettő párhuzamos AC-vel, mert középvonalak a BAC, illetve a DAC háromszögekben), azért az $A_1A_2A_3A_6$ négyszögnek egy szemközti oldalpárja párhuzamos és azonos hosszúságú. Vagyis $A_1A_2A_3A_6$ paralelogramma. Tudjuk, hogy AC merőleges BD-re, ezért a velük párhuzamos A_1A_2 és A_2A_3 is merőlegesek egymásra (A_2A_3 középvonal CBD háromszögben), így $A_1A_2A_3A_6$ téglalap.



A téglalap átlói azonos hosszúságúak és felezik egymást, így O-val jelölve átlóinak felezőpontját: $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_6$.

Hasonlóan gondolkozva igazolható, hogy $A_1A_4A_3A_5$ is téglalap. Az A_1A_3 felezőpontja O, így ennek a téglalapnak is O a középpontja, tehát: $OA_1 = OA_4 = OA_3 = OA_5$.

Mivel O ugyanakkora távolságra található minden él felezőpontjától, így az OA_1 sugarú O középpontú gömb tartalmazza az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 pontok mindegyikét.

6. *Emese havi bére nettó* 150 000 Ft. *Tegyük fel, hogy ezt a nettó havi bért évente* 10%*-kal emelik. Hány év múlva vásárolhatja meg béréből a* 15 000 000 Ft *értékű lakást, ha minden hónapban a fizetésének* 60%*-át takarítja meg és közben a lakás ára nem változik?* (*16 pont*)

Megoldás. Egy év elteltével a megtakarított pénze: $12 \cdot 150\,000 \cdot \dfrac{60}{100}$.
Ehhez adódik a második eltelt év után:

$$12 \cdot \left(150\,000 + 150\,000 \cdot \frac{10}{100}\right) \cdot \frac{60}{100} = 12 \cdot 150\,000 \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{60}{100}.$$

A harmadik év elteltével még hozzáadódik:

$$12 \cdot 150\,000 \cdot \left(\frac{110}{100}\right)^2 \cdot \frac{60}{100}.$$

Az $n+1$-edik év elteltével:

$$12 \cdot 150\,000 \cdot \left(\frac{110}{100}\right)^n \cdot \frac{60}{100}.$$

Így $n+1$ év eltelte után a megtakarított pénze:

$$12 \cdot 150\,000 \cdot \frac{60}{100} \cdot \left[1 + \frac{110}{100} + \left(\frac{110}{100}\right)^2 + \left(\frac{110}{100}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{110}{100}\right)^n\right] =$$

$$= 12 \cdot 150\,000 \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{1 - \left(\frac{110}{100}\right)^{n+1}}{1 - \frac{110}{100}} = 10\,800\,000 \left[\left(\frac{110}{100}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Azt a legkisebb n természetes számot keressük, amelyre ez eléri vagy meghaladja a 15 000 000-t:

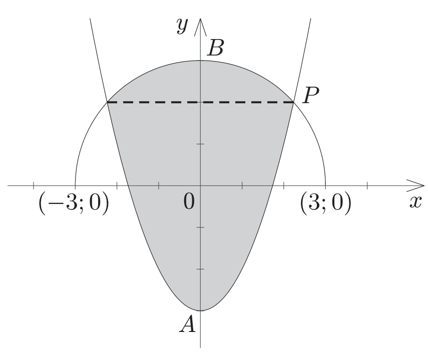
$$10\,800\,000 \cdot \left[\left(\frac{110}{100}\right)^{n+1} - 1\right] \geq 15\,000\,000,$$

$$\left(\frac{110}{100}\right)^{n+1} \geq 2{,}3889.$$

Az $n = 9$ a legkisebb megfelelő természetes szám.
Vagyis 10 év elteltével veheti meg a lakást.

7. *Adott a következő két egyenlettel egy-egy görbe:* $y = \sqrt{9 - x^2}$ *és* $y = x^2 - 3$. *Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amelyet e két görbe által meghatározott síkidom y tengely körüli forgatásával kapunk.* (*16 pont*)

Megoldás. Az első egyenlet origó középpontú, 3 egység sugarú félkör egyenlete, míg a második egy parabola, melynek szimmetriatengelye az y tengely, tengelypontja $A(0; -3)$. Az *ábra* mutatja az elhelyezkedésüket.



Megkeressük P koordinátáit:

$$\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2}, \\ y = x^2 - 3. \end{cases}$$

Az $x^2 = y+3$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$y = \sqrt{9-y-3} = \sqrt{6-y} \quad (0 \le y \le 6), \qquad y^2+y-6=0,$$

ahonnan $y=2$. Visszahelyettesítve: $P\big(\sqrt{5};2\big)$.

Ahhoz, hogy a kért térfogatot meghatározhassuk, y szerint integrálunk:

$$V = \pi \int_{-3}^{2} (y+3)\,dy + \pi \int_{2}^{3} (9-y^2)\,dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}+3y\right]_{-3}^{2} + \pi \left[9y - \frac{y^3}{3}\right]_{2}^{3} = \frac{32}{3}\,\pi.$$

Megjegyzés. Megtehettük volna, hogy $-90°$-kal elforgatjuk a koordináta-rendszerben a síkidomot és a szokásos módon x szerint integrálunk.

8. *Egy építkezéshez* 3 *cég szállítja a betont. Az elsőnek* 5, *a másodiknak* 4, *a harmadiknak* 6 *betonszállító kocsija van. Egy adott napon* 12 *kocsi betonra van szükség az építkezésen.*

Melyik cégtől hány kocsival rendeljenek, hogy a szállítási költség minimális legyen, ha a szállítási költség kocsinként a három cégtől rendre 40 000 Ft, 60 000 Ft *és* 50 000 Ft? (*16 pont*)

Megoldás. Legyen x, y, z az első, a második, illetve a harmadik cégtől igénybe vett kocsik száma. Ekkor $x+y+z=12$; $x \le 5$; $y \le 4$; $z \le 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$.

Az $f = 40\,000\,x + 60\,000\,y + 50\,000\,z$ kifejezésnek minimálisnak kell lennie.

Az első egyenletből $z = 12 - x - y \le 6$, vagyis $x + y \ge 6$, amelyhez hozzávesszük az x-re és az y-ra vonatkozó feltételeket. Behelyettesítve z-t az f-be:

$$f = -10\,000\,x + 10\,000\,y + 600\,000,$$

ahonnan az

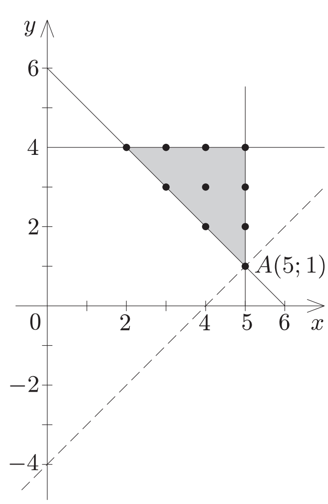
$$y = x + \frac{f}{10\,000} - 60$$

egyenletet kapjuk.

Az $x+y \ge 6$; $0 \le x \le 5$; $0 \le y \le 4$ egyenlőtlenségek az *ábrán* látható ABC háromszöglapot adják. Az első negyed szögfelezőjével párhuzamos $y = x + \dfrac{f}{10\,000} - 60$ egyenletű egyenes kezdőponti ordinátája $\dfrac{f}{10\,000} - 60$. Ez a kezdőponti ordináta az adott feltételek mellett akkor minimális, ha az

$$y = x + \frac{f}{10\,000} - 60$$

egyenletű egyenes az ABC háromszög „legmélyebben” fekvő rácspontján, az $A(5;1)$ ponton halad át.



Ezt behelyettesítve:

$$1 = 5 + \frac{f}{10\,000} - 60, \quad \text{vagyis} \quad f = 560\,000.$$

Így a legkedvezőbb rendelés: az első cégtől 5 kocsi, a másodiktól 1 kocsi és a harmadiktól 6 kocsi. Ekkor a minimális szállítási költség 560 000 Ft.

Megjegyzés. Ezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a rendelkezésre álló kocsik közül a lehető legolcsóbbakat választjuk.

9. *Adott az* $ax^2+bx+c=0$ *valós gyökökkel rendelkező másodfokú egyenlet. Tudjuk, hogy* $|a+b+c|<|a|$. *Igazoljuk, hogy a másodfokú egyenlet legalább egyik gyöke a* $]0;2[$ *intervallumban található.* *(16 pont)*

Megoldás. Az együtthatókra vonatkozó egyenlőtlenséget osszuk végig $|a|$-val:

$$\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|<1, \quad \text{azaz} \quad \left|1-\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a}\right|<1.$$

A Viète-formulák alapján: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ és $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$. Beírva ezeket az utóbbi összefüggésbe: $\big|1-(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2\big|<1$, azaz $|1-x_1|\cdot|1-x_2|<1$. Ez csak akkor igaz, ha a két tényező közül legalább az egyik kisebb 1-nél. Legyen az $|1-x_1|$ tényező, amelyik biztosan kisebb 1-nél. Ekkor $-1<1-x_1<1$, vagyis $0<x_1<2$.

Tehát valóban legalább az egyik gyök a $]0;2]$ intervallumban található.