I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\log_{2x} x + \log_{8x^2} x = 0$$

egyenletet!

2. Legyenek x és y olyan pozitív egészek, melyek eleget tesznek a

$$4y^2 - 9x^2 = 2007$$

egyenletnek.

Mennyi az összes összetartozó x és y érték szorzatának legnagyobb prímosztója?

3. Az $ABCD$ trapéz AB alapjának hossza háromszorosa a CD alapnak és az AD szárnak. Az AC átló hossza 5 egység, a BC szár hossza 10 egység.

Mekkorák az $ABCD$ trapéz oldalai?

4. Bizonyítsa be, hogy $2006^{2007} + 2008^{2006} + 2007$ osztható 7-tel!

5. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges háromszög a, b, c-vel jelölt oldalai között akkor és csak akkor áll fenn az $a \le b \le c$ egyenlőtlenség, ha az s_a, s_b, s_c-vel jelölt súlyvonalakra fennáll az $s_a \ge s_b \ge s_c$ egyenlőtlenség!

6. András és Balázs kosárra dobásban méri össze tudását. Annak valószínűsége, hogy András a kosárba talál 0,7, míg Balázs 0,4 valószínűséggel dob kosarat. Egy játszmában mindegyikük egyszer dob. Ha András talál, és Balázs nem, akkor András nyer. Ha Balázs talál, és András nem, akkor Balázs nyer. Minden más esetben a játszma eredménye döntetlen.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy két egymás utáni játszma mindegyike döntetlen lesz?

Második forduló

1. Legyen

$$f(x) = \log_2\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right) \qquad \text{és} \qquad g(x) = \frac{2^{f(x)} - 2^{-f(x)}}{2},$$

minden olyan valós x-re, amelyre a szereplő függvények értelmezhetők. Mennyi $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ pontos értéke?

2. Tekintse a

$$p(x) = (5x-2)\cdot(2x+4)\cdot(x-251)$$

és a

$$q(x) = (a-b+c)\cdot x^3 + (3a+b-c)\cdot x^2 + (a+b+c)\cdot x + d$$

polinomokat!

Határozza meg az a, b, c és d valós számokat úgy, hogy $p(x) = q(x)$ minden valós x-re teljesüljön!

3. Az a_n és b_n számsorozatokat az alábbi módon definiáljuk:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad \text{és} \qquad b_n = n\cdot a_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1}.$$

Határozza meg b_{2008} értékét!

4. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldala, mint átmérő fölé rajzolt kör a BC szakaszt a P, az AC szakaszt a Q pontban metszi. Legyenek a P és a Q pontokból az AB-re bocsátott merőlegesek talppontjai X és Y! Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{PX}{QY} = \frac{b^2\cdot(a^2+c^2-b^2)}{a^2\cdot(b^2+c^2-a^2)},$$

ahol a, b, c az ABC háromszög oldalhosszait jelentik!

5. Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenletet, ha p pozitív prímszám:

$$\sqrt{x^2-2x-3-p^2} + \sqrt{x^2-2x-3+p^2} = p^2.$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy kifejezést a következő képlettel definiálunk:

$$K = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 2017}{x^2 - 9},$$

ahol $x \in [-2008; 2008]$ és $x \in \mathbb{Z}$. Mennyi a valószínűsége annak, hogy K egész szám, ha x eleget tesz a fenti feltételeknek?

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójára és az AC befogójára kifelé megrajzoltuk az $ABDE$ és $ACFG$ négyzeteket. Jelölje M az EC és BG szakaszok metszéspontját! Mekkora szögben látszanak az M pontból az ABC háromszög oldalai?

3. Egy m sorból és n oszlopból álló, téglalap alakú táblázat minden mezőjébe egy-egy számot írunk oly módon, hogy az egyes sorokba írt számok egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjait képezik, hasonlóképpen az egyes oszlopokba írt számok is egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjai. Mennyi a táblázatba írt számok összege, ha a téglalap négy sarkába (csúcsába) írt számok összege 2008?

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\log_2 \big(1 + \cos(2x)\big) = 2^{1+\cos(3x)}.$$

2. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AB oldal egy belső pontja T, az AF és CT szakaszok metszéspontja M. Az ATM háromszög területe 8, a CFM háromszög területe 15 egység. Mekkora lehet az ABC háromszög területe?

3. Határozzuk meg, mely a és b egész számokra igaz:

$$\frac{b}{a-1} + \frac{a-4}{b+1} = 1.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy egy olyan téglalap alapú gúlában, amelyben a gúla magasságának a talppontja az alap valamely csúcsába esik, a leghosszabb oldalél hosszának negyedik hatványa legalább hatszorosa az oldallapok területei négyzetösszegének.

5. Adott az

$$x \mapsto \frac{2x+1}{2} - \sqrt{x^2 + x}$$

függvény, ahol $x \geq 0$.

(a) Monoton nő, vagy csökken a függvény?

(b) Melyik az a legkisebb pozitív egész n, amelyre $f(n) < \dfrac{1}{2008}$?

Második forduló

1. Tekintsük azokat a konvex négyszögeket, amelyek 100 darab egységnyi oldalú szabályos háromszögre darabolhatók. Mekkorák lehetnek a megfelelő négyszögek oldalai?

2. Egy 30 fős osztályban a karácsonyi ajándékozásról sorshúzással döntenek. Minden diák nevét felírják egy papírra, majd a 30 papírdarabot egy sapkába teszik. Névsor szerinti sorrendben mindenki kihúz egy papírt a sapkából és a rajta szereplő embernek készít ajándékot. Elképzelhető, hogy valaki saját magát ajándékozza meg.

Az átadás úgy történik, hogy először jelentkeznek, akik magukat húzták, majd a többi diák közül a legfiatalabb diák átadja ajándékát az általa húzott embernek, és innentől aki éppen megkapja az ajándékát, az lesz a soron következő ajándékot átadó ember. Ha valahol elakad a sor, azaz olyan diák kapja az ajándékot, aki már a sajátját átadta, de még nem mindenki adta át illetve kapta meg az ajándékát, akkor ez utóbbiak közül a legfiatalabb újra kezdi.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy osztályban hat egymást követő év karácsonyi ajándékozása során lesz legalább egy olyan év, amelyben senki nem húzza magát és a sor sem akad el? (Az osztály létszáma minden évben ugyanannyi.)

3. Melyek azok az x, y, z és w valós számok, amelyekre egyszerre teljesül:

$$x+y+z=\frac{3}{2}, \tag{1}$$

$$\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}+\sqrt{4z-1}\geq 2+3^{\sqrt{w-2}}? \tag{2}$$

4. Adott egy egységnyi oldalú négyzet. Határozzuk meg a négyzet síkjában levő azon körök középpontjainak a halmazát (mértani helyét), amelyeknek a négyzet mind a négy oldalával két közös pontja van.

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy urnában van $n+2$ darab cédula. Két cédulán páros szám, n darabon pedig páratlan szám van, ahol $n\geq 2$. Ketten játszanak, A és B. Minden játékot A kezd, kihúz két cédulát visszatevés nélkül, majd B is ugyanezt teszi. Az A játékos nyer, ha az általa húzott számok összege páros, de B összege páratlan. B nyer, ha az ő két számának összege páros, de A összege páratlan. Ha mindkettőjük összege egyszerre páros, vagy egyszerre páratlan, akkor újra játszanak. Milyen n érték esetén lesz a legkisebb az újrajátszás valószínűsége?

2. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja D. Az ABD és ADC háromszögek köré írt körök középpontjai rendre E és F. A BE és CF egyenesek metszéspontja G. Tudjuk, hogy $BC=2DG=2008$ és $EF=1255$ egység. Mekkora az AEF háromszög területe?

3. Egy 2 egység magasságú egyenes körhenger alapkörének átmérője legyen egy egység. A hengert olyan síkkal messük el, mely a forgástengellyel $45°$-os szöget zár be és az alapkörrel egyetlen közös pontja van. Legyen ez a pont O. A hengerpalástot ezután az O ponton átmenő alkotó mentén felvágva kiterítjük, ami által a metszetgörbe síkgörbe lesz.

Mely $x\mapsto f(x)$ függvény grafikonja ez a síkgörbe?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Az $ABCD$ síkbeli négyszög átlóinak (konkáv négyszög esetében az átlóegyeneseinek) metszéspontja M, az AMB, BMC, CMD és DMA háromszögek súlypontjai rendre a P, Q, R, S pontok, a BCD, ACD, ABD és ABC háromszögek súlypontjai pedig rendre az X, Y, Z, W pontok. Bizonyítsuk be, hogy az X, Y, Z, W pontok a $PQRS$ négyszög oldalegyenesein vannak.

2. Legyen f a pozitív valós számokon értelmezett valós értékű függvény, amelyre minden x, y esetén $f(xy)\leq xf(y)$. Igazoljuk, hogy minden x, y-ra $f(xy)=xf(y)$.

3. A térbeli A, B, C, D és E pontok közül semelyik négy sem esik egy síkba. Az A és B pontokat elválasztja a CDE sík (vagyis A és B a CDE sík különböző oldalára esik). Hasonlóan, B-t és C-t elválasztja az ADE sík, C-t és D-t elválasztja az ABE sík. Mutassuk meg, hogy ekkor D és E az ABC síknak ugyanarra az oldalára esik.

4. Van-e olyan, valós számokból álló, a $[0,1]$ intervallumba eső A végtelen halmaz, amely nem tartalmaz háromtagú számtani sorozatot, de bármely két A-beli elem közé is esik A-beli elem?

5. Mely $n\geq 2007$ egészek rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: bármely három különböző, n-nél nem nagyobb és az n-hez relatív prím pozitív egész összege is relatív prím n-hez?

Második (döntő) forduló

1. Az $A_1A_2\dots A_6$ konvex hatszög mindegyik belső szöge tompaszög. Az A_i középpontú k_i körök ($1\leq i\leq 6$) úgy helyezkednek el, hogy k_1 kívülről érinti k_2-t és k_6-ot, k_2 kívülről érinti k_1-et és k_3-at, általában k_i kívülről érinti k_{i-1}-et és k_{i+1}-et. A k_1-en található két érintési pontot összekötő egyenesnek és a k_3-on található érintési pontokat összekötő egyenesnek a metszéspontját összekötjük A_2-vel, ez lesz az e egyenes. Hasonlóan, a k_3-on, illetve k_5-ön levő érintési pontokat összekötő egyenesek metszéspontját összekötjük A_4-gyel, ez lesz az f egyenes. Végül, a k_5-ön, illetve k_1-en található érintési pontokat összekötő egyenesek metszéspontját összekötjük A_6-tal, ez lesz a g egyenes. Mutassuk meg, hogy e, f es g egy ponton mennek át.

2. Két játékos előtt egy-egy kavicskupac található, kezdetben mindkettőben k kavics van. Először az első játékos ezekhez hozzátesz összesen 2008 újabb kavicsot, az új kavicsokat tetszőlegesen oszthatja el a két kupac között (akár az összeset is az egyik kupacba teheti). Ezután a második játékos tesz hozzá a kupacokhoz összesen 2008 újabb kavicsot, és ugyanígy folytatják felváltva. Az nyer, akinek a kupacában (a saját vagy ellenfele lépése után) a kavicsok száma négyzetszám, míg ellenfele kupacára ez nem igaz (ha mindkét kupac ilyen, akkor a játékot folytatják). Van-e végtelen sok k-ra a második játékosnak nyerő stratégiája?

3. Mutassuk meg, hogy minden $1<r<s<2008/2007$ számokhoz vannak olyan (nem feltétlenül relatív prím) p és q pozitív egészek, hogy $r<p/q<s$, és sem a p, sem a q tízes számrendszerbeli felírásában nem szerepel a 0 számjegy.