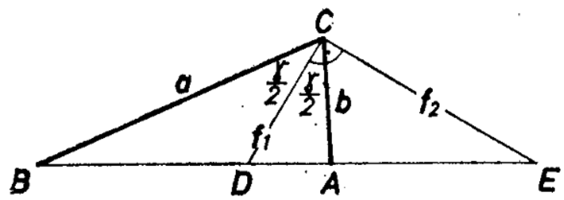
Legyen f_1 és f_2 metszéspontja az AB egyenessel D, ill. E. (E csak $a=b$ esetén nem léteznék.) Ekkor az ABC háromszög területe felírható egyrészt mint a CDA és CDB háromszögek területeinek összege, másrészt mint a CEB és CEA háromszögek területeinek különbsége.



Ha a keresett szög γ, e két egyenlőség a következő lesz:

$$af_1\sin\frac{\gamma}{2}+bf_1\sin\frac{\gamma}{2}=ab\sin\gamma,$$

$$af_2\sin\left(90^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)-bf_2\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=ab\sin\gamma,$$

amiből

$$f_1=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2},\qquad f_2=\frac{2ab}{a-b}\sin\frac{\gamma}{2}\quad\text{és}$$

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{a+b}{a-b}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \tag{2}$$

Ezek minden háromszögben érvényesek.

Összevetve a feltétellel:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{3},\qquad \frac{\gamma}{2}=60^\circ,\qquad \gamma=120^\circ.$$

Megjegyzések. 1. Fogásszerűnek lehetne minősíteni *szakaszok*, az f-ek fenti számítását *területek* révén. Kiszámíthatók az f-szakaszok a CAC_i háromszögekből ($i=1,2$) a sinustétel alapján is, felhasználva az osztásarány tételét:

$$C_iA:C_iB=CA:CB,\qquad AC_i=\frac{b}{c\pm b}\cdot c,$$

$$f_i\begin{cases}\sin\\ \cos\end{cases}\frac{\gamma}{2}=AC_i\,\sin\alpha=\frac{b}{a\pm b}c\,\sin\alpha=\frac{ab\,\sin\gamma}{a\pm b}.$$

2. Tudatosítsuk magunkban: nem egy konkrét háromszög egy kiszemelt méretét határoztuk meg – mintha a többbi méret valamilyen okból nem érdekelne bennünket. A feltevésbeli kapcsolat – mint *egyetlen* ismert összefüggés a háromszögre – természetesen nem elégséges a háromszög teljes meghatározására, de speciálisan a ***kérdezett szög kiszámításához*** elégséges. Az (1) összefüggés a háromszögeknek egy egész osztályát jellemzi, és erre az osztályra érdekes módon a C-nél levő szög értéke közös.

Látszólag 2 mérete szerepel a háromszögeknek (1) jobb oldalán, a (2)-ben pedig 3. A következő alakítás jobban mutatja, hogy arányok kapcsolatáról van szó:

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{1+\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{b}{a}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$