1. feladat. „Vízzel hajtott rizshántoló mozsár”

Bevezetés. Vietnamban a legtöbb embernek a rizs a fő tápláléka. A fehér rizst úgy készítik a hántolatlan rizsből, hogy hántolják, vagyis egy réteget eltávolítanak a rizsszemek felületéről. Észak-Vietnam hegyvidékei vízben gazdagok, és az ott élő emberek vízzel hajtott rizshántoló mozsarakat használnak ehhez a munkához. Az *1. ábra* egy ilyen mozsarat mutat, a *2. ábrán* pedig az látható, hogyan működik.

1. ábra. Vízzel hajtott rizshántoló mozsár

Tervezés. Az *1. ábrán* látható rizs-hántoló mozsár a következő részekből áll:

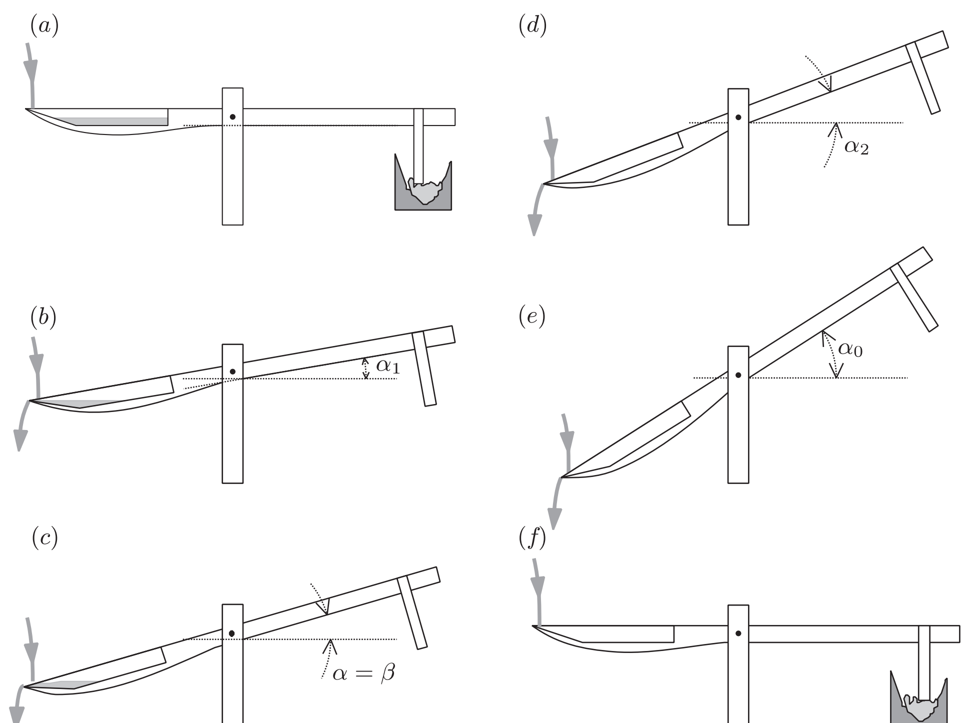
A mozsár, lényegében egy fa tartály a rizs számára.

Az emelő, ami egy fatörzs, egyik vége vastagabb, a másik vékonyabb. Az emelő vízszintes tengely körül tud elfordulni. A *mozsártörőt* merőlegesen rögzítik az emelő vékonyabb végére. A mozsártörőt olyan hosszúra készítik, hogy akkor érje el a mozsárban a rizst, amikor az emelő vízszintes. Az emelő vastagabb végét úgy alakítják ki, hogy egy üreget vágnak ki belőle, így egy kanalat vájnak ki a farúd végén. A kanál alakja nagyon fontos a mozsár működésében.

A működés szakaszai. A mozsár működése kétféle lehet.

Rendes, munkavégző körfolyamat. Ilyenkor a mozsár a *2. ábrán* bemutatott működési ciklust végzi.

A rizshántoló funkció abból a munkából származik, amit a mozsártörő a rizsnek közvetít a *2. ábra* (f) lépésében. Ha valamilyen okból a mozsártörő nem éri el a rizsszemeket, azt mondjuk, hogy a mozsár nem végez munkát.



2. ábra

Rendellenes, mozdulatlan állapot. A működési ciklus (c) lépésében (*2. ábra*), amikor az α dőlési szög növekszik, a kanálban lévő víz mennyisége csökken. Egy bizonyos időpillanatban a víz mennyisége éppen elegendő ahhoz, hogy egyensúlyban tartsa a szerkezet rúdját. Jelöljük a dőlési szöget ebben a pillanatban β-val. Ha az emelőrudat a β szögben

[1] A hivatalos megoldást és a mérési feladatot a KöMaL novemberi számában ismertetjük.
A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.

tartjuk, és a kezdeti szögsebesség nulla, akkor az emelőrúd örökre ebben a helyzetben marad. Ez a mozdulatlan állapot felemelt emelőrúddal. Ennek a helyzetnek a stabilitása a kanálba folyó Φ vízmennyiségtől (vízhozamtól) függ. Ha Φ meghalad egy bizonyos Φ_2 értéket, akkor a mozdulatlan állapot stabil, és a mozsár nem kerülhet a munkavégző funkcióba. Más szavakkal: Φ_2-nél nagyobb vízhozam esetén a mozsár nem működik.

A rizshántoló mozsár működési ciklusa:

(a) Kezdetben nincs víz a kanálban, a mozsártörő a mozsárban nyugszik. Lassan csordogálva víz folyik a kanálba, eközben az emelő rúdja mégis vízszintes helyzetű marad.

(b) Egy bizonyos pillanatban a víz mennyisége eléri azt a határt, ami az emelőrúd felemeléséhez kell. A megdőlés hatására a víz megindul a kanál távolabbi oldala felé, ezzel még gyorsabban dönti az emelőrudat. A víz az $\alpha = \alpha_1$ szöghelyzet elérésekor kezd kifolyni.

(c) Amint az α szög növekszik, a víz tovább folyik ki. Egy bizonyos $\alpha = \beta$ dőlési szögnél a teljes forgatónyomaték nulla.

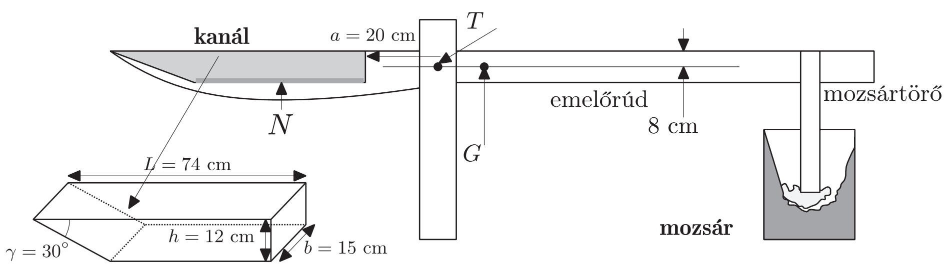
(d) α folyamatosan növekszik, a víz kifolyása addig folytatódik, amíg a kanál teljesen kiürül.

(e) α továbbra is növekszik a rendszer tehetetlensége miatt. A kanál alakja miatt hiába folyik víz a kanálba, az azonnal kifolyik onnan. Az emelőrúd tehetetlenségi mozgása addig folytatódik, amíg α eléri a maximális α_0 értékét.

(f) Mivel nincs víz a kanálban, az emelőrúd súlya visszahúzza a rendszert az eredeti vízszintes helyzetbe. A mozsártörő belecsapódik a (rizst tartalmazó) mozsárba, és ezután egy új ciklus kezdődik el.

A probléma. Az általunk vizsgált vízzel hajtott rizshántoló mozsár (*3. ábra*) paraméterei a következők: Az emelőrúd tömege (a mozsártörővel együtt, ha a kanálban nincs
víz): $M = 30$ kg. Az emelőrúd tömegközéppontja G. Az emelőrúd a T tengely körül forog (melynek vetülete az ábrán a T pont). Az emelőnek a T tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka: $I = 12\ \mathrm{kg \cdot m^2}$. Amennyiben a kanálban víz van, ennek a víznek a tömegét jelölje m, tömegközéppontja pedig legyen N. Az emelőrúd vízszinteshez viszonyított dőlésszöge α.

A berendezés legfontosabb geometriai adatait a *3. ábra* mutatja.



3. ábra. A rizshántoló mozsár tervrajza és méretezése

Hanyagoljuk el a tengely körüli forgáskor fellépő súrlódást, valamint a kanálba eső víz által kifejtett erőt. Továbbá közelítésként tekintsük a kanálban levő víz felszínét mindig vízszintesnek.

1. *A mozsár felépítése.*

Kezdetben a kanál üres, és az emelőrúd vízszintes. Ezután fokozatosan egyre több víz folyik a kanálba, mígnem az emelőrúd elkezd forogni. Ebben a pillanatban a kanálban levő víz mennyisége: $m = 1{,}0$ kg.

1.1. Határozd meg az emelőrúd G tömegközéppontjának a T forgástengelytől mért távolságát! Ha a kanál üres, GT vízszintes.

1.2. Amikor az emelőrúd eléri a vízszinteshez viszonyított α_1 szögű helyzetet, a víz elkezd kifolyni a kanálból, míg az emelőrúd α_2 szögű helyzeténél a kanál teljesen kiürül. Határozd meg az α_1 és az α_2 szöget!

1.3. Legyen $\mu(\alpha)$ a (T tengelyre vonatkoztatott) teljes forgatónyomaték, amely az emelőrúd, valamint a kanálban levő víz súlyából származik. A $\mu(\alpha)$ forgatónyomaték $\alpha = \beta$ esetén zérussá válik. Határozd meg a β szöget, valamint ebben a helyzetben a kanálban levő víz m_1 tömegét!

2. *Rendes munkavégző körfolyamat.*

Tegyük föl, hogy a kanálba csorgó víz Φ hozama időben állandó, és kicsiny. Így az emelőrúd mozgása közben a kanálba folyó víz mennyisége elhanyagolható. Ebben a feladatban hanyagoljuk el a munkavégzési ciklus során a szerkezet tehetetlenségi nyomatékának változását.

2.1. Ábrázold egy teljes munkavégzési ciklusra a $\mu(\alpha)$ függvényt, azaz rajzold fel a μ forgatónyomatékot az α szög függvényében! Add meg számszerűen $\mu(\alpha)$ értékét az α_1, α_2 és $\alpha = 0$ szög esetén!

2.2. A **2.1.** pontban kapott grafikon elemzésével add meg a $\mu(\alpha)$ forgatónyomaték által végzett W_{teljes} teljes munka, valamint a mozsártörő becsapódásakor a rizsnek átadott $W_{\text{ütés}}$ energia geometriai értelmezését!

2.3. A μ forgatónyomatékot α függvényében ábrázoló grafikon alapján becsüld meg az α_0 szög és a $W_{\text{ütés}}$ becsapódási energia értékét! (A kanálba be- és kifolyó víz kinetikus energiája elhanyagolhatónak tekinthető.) A számolás egyszerűsítése érdekében, ha szükséges, görbe vonalakat törtvonalakkal helyettesíthetsz a grafikonon.

3. *A mozdulatlan állapot.*

Folyjon víz a kanálba állandó Φ vízhozammal, azonban most nem hanyagolhatjuk el a kanálba befolyó víz mennyiségét az emelőrúd mozgása közben.

3.1. Tegyük fel, hogy a kanálból mindig túlfolyik a víz.

3.1.1. Vázold fel egy grafikonon a μ forgatónyomatékot az α szög függvényében az $\alpha = \beta$ eset közelében. Állapítsd meg az $\alpha = \beta$ egyensúlyi helyzet stabilitását!

3.1.2. Határozd meg a forgatónyomaték $\mu(\alpha)$ matematikai kifejezését mint $\Delta\alpha$ függvényét, ahol $\alpha = \beta + \Delta\alpha$, és $\Delta\alpha$ kicsi.

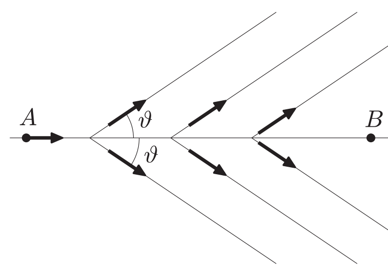
3.1.3. Írd fel az emelőrúd mozgásegyenletét, ha nulla kezdősebességgel indul el $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ helyzetből ($\Delta\alpha$ kicsi). Mutasd meg, hogy a mozgás nagy pontossággal harmonikus rezgés. Számítsd ki a τ periódusidőt!

3.2. Adott Φ esetén a kanál minden időpillanatban túlfolyik, de csak akkor, ha az emelőrúd mozgása elegendően lassú. A harmonikus rezgőmozgás amplitúdójára létezik egy felső korlát, ami Φ-től függ. Határozd meg Φ-nek a minimális Φ_1 értékét (kg/s egységben) akkor, ha az emelőrúd $1°$-os amplitúdóval harmonikus rezgőmozgást végez.

3.3. Tegyük fel, hogy Φ elegendően nagy ahhoz, hogy az emelőrúd szabad mozgása közben, amikor a dőlési szög α_2-ről α_1-re csökken, a kanálban lévő víz mindig túlfolyjon. Azonban ha Φ túlságosan nagy, a mozsár nem tud működni. Feltételezve, hogy az emelő mozgása harmonikus oszcillátornak tekinthető, becsüld meg azt a minimális Φ_2 vízhozamot, amelynél a rizshántoló mozsár nem működik.

2. feladat. Cserenkov-sugárzás és gyűrűs képalkotáson alapuló számláló

A fény vákuumban c sebességgel terjed. Semmiféle részecske nem mozoghat ennél a c sebességnél gyorsabban. Azonban lehetséges, hogy valamely átlátszó közegben mozgó részecske v sebessége nagyobb, mint a közegbeli $\frac{c}{n}$ fénysebesség, ahol n a közeg (abszolút) törésmutatója. Kísérletileg 1934-ben *P. A. Cserenkov* észlelte, majd elméletileg 1937-ben *I. J. Tamm* és *I. M. Frank* bizonyította, hogy ha egy töltött részecske n törésmutatójú átlátszó közegben v sebességgel mozog, és teljesül, hogy $v > \frac{c}{n}$, akkor a részecske fényt bocsát ki; ez az úgynevezett *Cserenkov-sugárzás*.



A sugárzás iránya a részecske pályájával

$$\vartheta = \arccos\frac{1}{\beta n} \tag{1}$$

szöget zár be, ahol $\beta = \frac{v}{c}$.

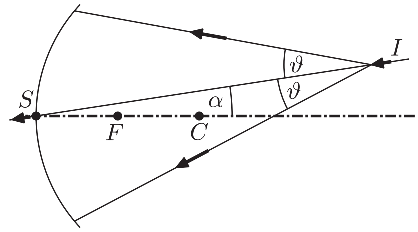
1. A fenti tény megállapítása céljából tekintsünk egy részecskét, mely egyenes pályán állandó $v > \frac{c}{n}$ sebességgel mozog. A $t = 0$ időpontban a részecske az A pontban van, míg a t_1 pillanatban a B pontban. Mivel a probléma az AB tengelyre nézve forgásszimmetrikus, elegendő csupán egyetlen olyan síkban vizsgálni a fény terjedését, amely tartalmazza az AB tengelyt.

Bármely A és B közti C pontban a részecske gömbhullámokat bocsát ki, melyek $\frac{c}{n}$ sebességgel terjednek. A hullámfront egy adott t időpillanatban a burkolója (közös érintő görbéje) ezeknek a gömbhullámoknak.

1.1. Határozd meg a hullámfrontot egy t_1 időpillanatban, és rajzold be a hullámfrontnak egy, a részecske pályáját tartalmazó síkkal való metszetét!

1.2. Fejezd ki a hullámfront metszete és a részecske pályája között mérhető φ szöget n és β segítségével!

2. Tekintsük $v > \frac{c}{n}$ sebességgel mozgó részecskék nyalábját, melyre teljesül, hogy a nyaláb IS egyenese és a sugárzás kúpja közti ϑ szög kicsi. (Lásd az *ábrát!*) A nyaláb útjában, az S pontban egy C középpontú, f fókusztávolságú homorú gömbtükör helyezkedik el úgy, hogy az SC és az SI egyenesek közti α szög szintén kicsiny. A tükörről visszavert fény a tükör fókuszsíkjában gyűrű alakú képet alkot. Igazold ezt az állítást egy vázlatos ábra segítségével! Add meg a gyűrű r sugarát és középpontjának O helyét!



Az itt ismertetett elrendezést a *gyűrűs képalkotáson alapuló Cserenkov-számlálókban* (Ring Imaging Cherenkov Counter, RICH) használják, és azt a közeget, amiben a részecskék haladnak, *sugárzó közegnek* nevezik.

Megjegyzés: Ennek a feladatnak minden kérdésében az α és ϑ szögben másod- vagy ennél magasabb rendű tagokat hanyagoljuk el.

3. Egy ismert, $p = 10{,}0$ GeV/c impulzusú részecskéket tartalmazó nyaláb háromféle különböző részecskét tartalmaz: protont, kaont és piont, melyek nyugalmi tömege rendre $M_\mathrm{p} = 0{,}94$ GeV/c^2, $M_\kappa = 0{,}50$ GeV/c^2 és $M_\pi = 0{,}14$ GeV/c^2. Emlékeztetünk rá, hogy mind pc, mind pedig Mc^2 energia dimenziójú mennyiség, és 1 eV az az energia, amelyre egy elektron 1 V feszültséggel való gyorsítás hatására tesz szert. További mértékegységek: 1 GeV $= 10^9$ eV, valamint 1 MeV $= 10^6$ eV.

A részecskenyaláb P nyomású levegőn, mint sugárzó közegen halad át. A levegő n törésmutatója a következő módon függ (az atmoszférákban mért) P nyomástól:

$$n = 1 + aP, \quad \text{ahol} \quad a = 2{,}7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{atm}^{-1}.$$

3.1. Határozd meg mindhárom részecsketípus esetén azt a minimális P_min levegőnyomást, amely fölött a Cserenkov-sugárzás kialakulhat.

3.2. Határozd meg azt a $P_{\frac{1}{2}}$ nyomást, amely mellett a kaonokhoz tartozó gyűrű sugara éppen fele a pionokhoz tartozó gyűrű sugarának! Számold ki ebben az esetben a ϑ_κ és ϑ_π szögeket is!

Ezen a nyomáson megfigyelhető-e a protonokhoz tartozó gyűrű?

4. Most tegyük fel, hogy a részecskenyaláb nem teljesen monokromatikus; a részecskék impulzusa egy 10 GeV/c körül koncentrált, Δp félértékszélességű eloszlást alkot. Ennek következtében a gyűrűk kiszélesednek, és a ϑ szög eloszlásának félértékszélessége $\Delta\vartheta$. A sugárzó közeg (levegő) nyomása a **3.2.** pontban meghatározott $P_{\frac{1}{2}}$ érték.

4.1. Határozd meg $\dfrac{\Delta\vartheta_\kappa}{\Delta p}$ és $\dfrac{\Delta\vartheta_\pi}{\Delta p}$-t, azaz a $\dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta p}$ hányados értékét kaon és pion esetén!

4.2. Amennyiben a két gyűrű közti $\vartheta_\pi - \vartheta_\kappa$ szögeltérés nagyobb, mint a félértékszélességek $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_\kappa + \Delta\vartheta_\pi$ összegének 10-szerese, tehát ha $\vartheta_\pi - \vartheta_\kappa > 10\ \Delta\vartheta$, akkor a két gyűrűt jól el lehet különíteni egymástól. Határozd meg azt a maximális Δp értéket, amely mellett a két gyűrű még jól elkülöníthető!

5. Cserenkov a nevéről elnevezett jelenséget először egy vízzel telt palackban figyelte meg, mely radioaktív forrás közelében helyezkedett el. Szemével érzékelte, hogy a palackban levő víz fényt bocsát ki.

5.1. Határozd meg azt a T_min minimális mozgási energiát, amely mellett egy M nyugalmi tömegű, vízben haladó részecske Cserenkov-sugárzást bocsát ki! A víz törésmutatója $n = 1{,}33$.

5.2. Tudjuk, hogy a Cserenkov által használt sugárforrás vagy $M_\alpha = 3{,}8$ GeV/c^2 nyugalmi tömegű α-részecskéket (azaz hélium atommagokat) vagy $M_\mathrm{e} = 0{,}51$ MeV/c^2 nyugalmi tömegű β-részecskéket (azaz elektronokat) bocsát ki. Határozd meg T_min számszerű értékét α- és β-részecskék esetén!

Felhasználva, hogy radioaktív sugárforrások által kibocsátott részecskék mozgási energája soha nem halad meg néhány MeV-ot, döntsd el, hogy melyik részecske hozta létre a Cserenkov által először megfigyelt sugárzást!

6. Az előző kérdésekben a Cserenkov-effektusnak a kibocsátott fény hullámhosszától való függését nem vettük figyelembe. Most tekintetbe vesszük azt a tényt, hogy a Cserenkov-sugárzásnak széles folytonos spektruma van, mely tartalmazza a látható (0,4 μm-től 0,8 μm-es hullámhosszig terjedő) tartományt is. Azt is tudjuk, hogy a látható fény tartományában a λ hullámhossz növelésével a sugárzó közeg n törésmutatója lineárisan csökken $(n-1)$-nek 2%-ával.

6.1. Tekintsünk egy pontosan $10{,}0$ GeV/c impulzusú pionokból álló nyalábot, amely 6 atm nyomású levegőben halad. Határozd meg a látható tartomány két végpontjához tartozó $\delta\vartheta$ szögeltérést!

6.2. Az előző eredmény alapján tanulmányozd kvalitatíven (nem számszerűen) a diszperzió hatását egy olyan pion-nyaláb által létrehozott gyűrűs képen, melyben a részecskék impulzusa a $p = 10$ GeV/c érték körül $\Delta p = 0{,}3$ GeV/c félérték-szélességgel oszlik el.

6.2.1. Határozd meg a gyűrűnek a diszperzió (azaz a törésmutató hullámhossz függése miatt bekövetkező) kiszélesedését, valamint a gyűrűnek a nyalábot alkotó részecskék impulzus-inhomogenitásából fakadó kiszélesedését!

6.2.2. Hogyan változik a gyűrű színe, miközben a gyűrű belső élétől a külső él felé haladunk!

3. feladat. A levegő hőmérsékletének magasság szerinti változása, a légköri stabilitás és a légszennyeződés

A levegő függőleges mozgása sok légköri folyamatért (például a felhők és egyéb kiválások kialakulásáért és a légszennyeződés szétterjedéséért) felelős. Ha a légkör stabil, akkor a függőleges mozgás nem valósulhat meg; a levegőben lévő szennyeződések összegyűlnek a kibocsátás helye közelében, nem terjednek szét, nem hígulnak fel. Instabil légkör esetén azonban a levegő függőleges mozgása elősegíti a légszennyeződések függőleges szétterjedését. Emiatt a szennyezők koncentrációja nem csak a kibocsátó források erősségétől, hanem a légkör stabilitásától is függ.

A levegő stabilitását a meteorológiában használatos elemi „levegőcsomag" (*air parcel*) fogalmának a használatával fogjuk meghatározni, összehasonlítva az adiabatikus állapotváltozás közben emelkedő vagy süllyedő elemi levegőcsomag hőmérsékletét a környező levegő hőmérsékletével. Látni fogjuk, hogy sok esetben a légszennyeződést tartalmazó, a felszínről felfelé emelkedő elemi levegőcsomag nyugalmi állapotba jut bizonyos magasságban, amit *keveredési magasság*nak nevezünk. Minél nagyobb a keveredési magasság, annál alacsonyabb a légszennyezés koncentrációja. Meg fogjuk határozni a keveredési magasságot és a szén-monoxid koncentrációt, amit egy reggeli csúcsforgalmi helyzetben Hanoi belvárosában a motorbiciklik bocsátanak ki egy olyan esetben, amikor 119 m magasság felett hőmérsékinverzió (amikor a levegő hőmérséklete felfelé növekszik) következtében a függőleges keveredés nem folytatódhat.

A levegőt tekintsük kétatomos ideális gáznak, melynek moláris tömege: $\mu = 29$ g/mol.

Kvázi-egyensúlyi adiabatikus folyamatban teljesül a $pV^\gamma =$ állandó összefüggés, ahol $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$ a gáz fajhőhányadosa.

A következő adatokat használhatod:
Az egyetemes gázállandó: $R = 8{,}31$ J/(mol $\cdot$ K).
A légköri nyomás a földfelszínen: $p_0 = 101{,}3$ kPa.
Az állandónak tekinthető gravitációs gyorsulás: $g = 9{,}81$ m/s^2.
A levegő mólhője állandó nyomáson: $c_p = \dfrac{7}{2}R$.
A levegő mólhője állandó térfogaton: $c_V = \dfrac{5}{2}R$.

Matematikai útmutatás:

a)
$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B}\int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B}\ln(A+Bx).$$

b) A $\dfrac{dx}{dt} + Ax = B$ differenciálegyenlet (ahol A és B állandók) megoldása
$$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A},$$
ahol $x_1(t)$ a $\dfrac{dx}{dt} + Ax = 0$ differenciálegyenlet megoldása.

c)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

1. *A levegő hőmérsékletének magasság szerinti változása.*

1.1. Tegyük fel, hogy a légkör hőmérséklete mindenhol azonos, értéke T_0. Határozd meg, hogyan függ a légkör p nyomása a z magasságtól!

1.2. Tegyük fel, hogy a légkör hőmérséklete a következő összefüggés szerint változik a magassággal:
$$T(z) = T(0) - \Lambda z,$$
ahol Λ egy állandó, amit a légkör hőmérsékletcsökkenési sebességének nevezünk (a függőleges hőmérsékletgradiens: $-\Lambda$).

1.2.1. Határozd meg ebben az esetben is, hogyan függ a légkör p nyomása a z magasságtól!

1.2.2. Szabad áramlás (konvekció) következik be, ha a levegő sűrűsége növekszik a magassággal. Milyen Λ értékek esetén valósul meg szabad áramlás?

2. *Elemi levegőcsomag hőmérsékletének változása függőleges mozgás közben.*

Tekintsünk egy elemi levegőcsomagot, ami fel-le mozog a légkörben. Az elemi levegőcsomag számottevő kiterjedésű levegőtömeg, néhány méter nagyságú, amit független termodinamikai egységként kell kezelnünk, azonban mégis olyan kicsiny, hogy a hőmérsékletét azonosnak, homogénnek tekinthetjük. Egy elemi levegőcsomag függőleges mozgását kváziadiabatikus folyamatként tárgyalhatjuk, azaz a környező levegővel való hőcserét elhanyagolhatjuk. Ha a levegőcsomag emelkedik a légkörben, akkor kitágul és lehűl. Következésképpen, ha lefelé mozog, akkor a növekvő külső nyomás összenyomja a levegőt a csomagon belül, és hőmérséklete emelkedni fog.

Ha a levegőcsomag mérete nem nagy, akkor feltehetjük, hogy a levegőcsomag határán és belsejében a nyomás mindenhol ugyanakkora, és megegyezik a $p(z)$ légköri nyomás értékkel, ahol z a csomag középpontjának magassága. A csomag hőmérséklete is a csomag minden pontjában ugyanakkorának tekinthető. Ez a hőmérséklet – amit $T_{\text{csomag}}(z)$-vel jelölünk – általában különbözik a környező levegő $T(z)$ hőmérsékletétől. A **2.1.**, valamint a **2.2.** pontokban a $T(z)$ függvényt adottnak tekinthetjük, melynek konkrét formája nem ismert.

2.1. A csomag T_{csomag} hőmérsékletének változását a magasság szerint a következő módon adhatjuk meg: $\frac{dT_{\text{csomag}}}{dz} = -G$. Vezess le egy formulát a G kifejezésre!

2.2. Tekintsük azt a különleges légköri állapotot, amikor bármely z magasságban a légkör T hőmérséklete megegyezik az elemi levegőcsomag T_{csomag} hőmérsékletével: $T(z) = T_{\text{csomag}}(z)$. Használjuk ilyenkor a Γ jelölést G helyett, vagyis

$$\Gamma = -\frac{dT_{\text{csomag}}}{dz}, \quad \text{ha} \quad T(z) = T_{\text{csomag}}(z).$$

Γ neve: száraz adiabatikus csökkenési sebesség.

2.2.1. Határozz meg egy formulát a Γ kifejezésre!

2.2.2. Számítsd ki Γ számszerű értékét!

2.2.3. Add meg ebben az esetben a $T(z)$ légköri hőmérséklet kifejezését a magasság függvényében!

2.3. Tegyük fel, hogy a légkör hőmérséklete a következő összefüggés szerint változik a magassággal: $T(z) = T(0) - \Lambda z$, ahol Λ egy állandó. Határozd meg az elemi levegő csomag $T_{\text{csomag}}(z)$ hőmérsékletének függését a z magasságtól!

Add meg a $T_{\text{csomag}}(z)$ kifejezés közelítő értékét, ha $|\Lambda \cdot z| \ll T(0)$ és $T(0) \approx T_{\text{csomag}}$.

3. *A légköri stabilitás.*

Ebben a részben feltesszük, hogy T lineárisan változik a magassággal.

3.1. Tekintsünk egy elemi levegőcsomagot, amely kezdetben egyensúlyban van a környező levegővel z_0 magasságban, azaz hőmérséklete ugyanolyan $T(z_0)$ értékű, mint a környező levegő. Ha a levegőcsomag lassan felfelé vagy lefelé mozog, a következő három eset egyikének teljesülnie kell:

– A levegőcsomag visszajut az eredeti z_0 magasságba, a levegőcsomag egyensúlya stabil (biztos). A légkört ekkor stabilnak tekinthetjük.

– A levegőcsomag folytatja mozgását a megkezdett irányba, a levegőcsomag egyensúlya instabil (bizonytalan). A légkör ilyenkor instabil.

– A levegőcsomag megmarad az új helyzetében, a levegőcsomag egyensúlya közömbös (indifferens). A légkört semlegesnek nevezzük.

Milyen feltételnek kell Λ értékére teljesülnie, hogy a légkör stabil, instabil, illetve semleges legyen?

3.2. A levegőcsomag talajon mérhető $T_{\text{csomag}}(0)$ hőmérséklete legyen magasabb, mint a környező levegő $T(0)$ hőmérséklete. Ilyenkor a felhajtóerő emelni kezdi a levegőcsomagot. Vezess le egy olyan kifejezést, ami megmondja, hogy a levegőcsomag mekkora maximális magasságba emelkedik stabil légkör esetén! A kifejezésben a hőmérsékleteken kívül csak Λ és Γ szerepeljen.

4. *A keveredési magasság.*

4.1. Az *1. táblázat* egy meteorológiai léggömb hőmérséklet adatait tartalmazza, amelyeket Hanoiban mértek egy novemberi napon reggel 7:00 órakor. A hőmérséklet magasságtól való függését jó közelítéssel a $T(z) = T(0) - \Lambda z$ formulával lehet leírni, ahol a Λ hőmérsékletcsökkenési sebesség a $0 < z < 96$ m, 96 m $< z < 119$ m, valamint a 119 m $< z < 215$ m szakaszokon más és más konstans.

Magasság [m]	Hőmérséklet [°C]
5	21,5
60	20,6
64	20,5
69	20,5
75	20,4
81	20,3
90	20,2
96	20,1
102	20,1
109	20,1
113	20,1
119	20,1
128	20,2
136	20,3
145	20,4
153	20,5
159	20,6
168	20,8
178	21,0
189	21,5
202	21,8
215	22,0
225	22,1
234	22,2
246	22,3
257	22,3

1. táblázat. A meteorológiai léggömb hőmérséklet adatai, melyeket Hanoiban mértek egy novemberi napon reggel 7:00 órakor

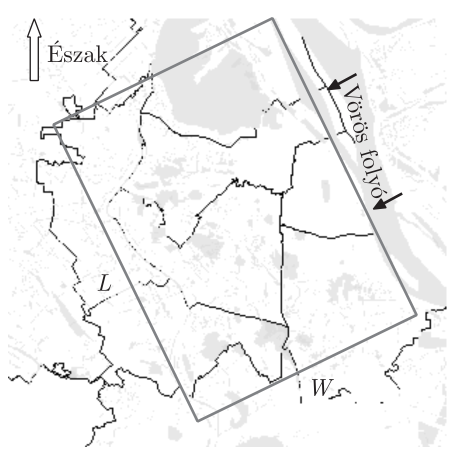
Tegyük fel, hogy egy $T_{\text{csomag}}(0) = 22°\text{C}$ hőmérsékletű levegőcsomag emelkedni kezd a föld felszínéről. Az *1. táblázat* adatainak felhasználásával, és a fenti lineáris közelítés használatával számítsd ki a levegőcsomag hőmérsékletét a 96 m-es és a 119 m-es magasságok között!

4.2. Határozd meg a levegőcsomag által elérhető maximális H magasságot, és a levegőcsomag $T_{\text{csomag}}(H)$ hőmérsékletét!

A H magasságot keveredési magasságnak nevezzük. A föld felszínéről érkező légszennyeződések ebben a rétegben keveredhetnek a légköri levegővel (például szelek, örvények stb. útján), és így a levegőcsomagban a szennyeződések felhígulhatnak.

5. *Szén-monoxid szennyezés* (CO) *becslése egy reggeli motorbiciklis csúcsforgalmi órában Hanoiban.*

Hanoi belvárosát egy téglalappal közelíthetjük, melynek L és W oldalát az *ábra* mutatja, egyik oldalán a Vörös folyó dél-nyugati partjával.



A becslések szerint a reggeli csúcsforgalomban 7-től 8 óráig $8 \cdot 10^5$ motorbicikli van az utakon, melyek mindegyike átlagosan 5 km utat tesz meg, és közben kilométerenként 12 g szén-dioxidot (CO) bocsát ki. A CO szennyeződés mennyiségét időben egyenletes kibocsátásúnak tekinthetjük, a csúcsforgalom alatt állandó M mértékűnek. Ugyanakkor a tiszta észak-keleti szél u sebességgel fúj a Vörös folyóra merőlegesen (azaz merőlegesen a téglalap L oldalára), és ugyanezzel a sebességgel hagyja el a várost, miközben magával viszi a CO-val szennyezett levegő egy részét.

Használjuk a következő durva, közelítő modellt:

- A CO gyorsan szétoszlik a keveredési réteg teljes térfogatában Hanoi belvárosa felett, így a t időpillanatban a $C(t)$ CO koncentráció állandónak tekinthető az L, W és H méretekkel jellemezhető téglatest alakú doboz belsejében.
- A dobozba befújó szél tiszta, feltehetjük, hogy nem tartalmaz szennyezést, továbbá azt is feltételezhetjük, hogy nem távozik szennyeződés a doboz széllel párhuzamos oldalain át.
- 7 óra előtt a levegő CO koncentrációja elhanyagolható.

5.1. Határozd meg azt a differenciálegyenletet, ami megadja a $C(t)$ CO koncentráció értékét az idő függvényében!
5.2. Írd le a $C(t)$ CO koncentrációra kapott egyenlet megoldását, azaz add meg a $C(t)$ függvényt!
5.3. Számítsd ki a CO koncentráció 8 órára vonatkozó számszerű értékét!
Adatok: $L = 15$ km, $W = 8$ km, $u = 1$ m/s.