

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a)
$$\frac{x+3}{3} = \frac{x^2+3x-4}{2x^2+4x-16} \cdot (x+3);$$

b)
$$\lg(6^x - 96) - 2 = \lg 2 + \lg 6.$$

(11 pont)

Megoldás. a) Alakítsuk szorzattá a másodfokú kifejezéseket:

$$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1), \quad 2x^2 + 4x - 16 = 2(x-2)(x+4).$$

Kikötések: $x \neq 2$ és $x \neq -4$.

Mivel $x \neq -4$, egyszerűsíthetünk $(x+4)$ -gyel, majd $6(x-2)$ -vel beszorozva kapjuk a következő egyenletet: $2(x+3)(x-2) = 3(x-1)(x+3)$. Ennek megoldásai: $x = -3$ és $x = -1$. Mindkét szám megoldása az egyenletnek.

b) Kikötés a logaritmus miatt: $x > \log_6 96 \approx 2,547$. A logaritmus azonosságainak alkalmazásával és a logaritmus függvény szigorú monoton tulajdonságának felhasználásával felírható:

$$\frac{6^x - 96}{100} = 12.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása: $x = 4$. Ez az eredeti egyenletnek is megoldása, mert minden feltételnek megfelel.

2. Egy metró mozgólépcsőjén egy táska „a” másodperc alatt ér le a metrószintre. Egy utas „b” másodperc alatt teszi meg ugyanezt az utat a nem működő mozgólépcsőn. Mennyi idő alatt ér le az utas a metrószintre a működő mozgólépcsőn, ha közben ugyanúgy lépeget, mint akkor, amikor nem működik? (12 pont)

Megoldás. A megtett út legyen s , ekkor a mozgólépcső sebessége: $v_m = \frac{s}{a}$, az utas sebessége: $v_u = \frac{s}{b}$. Ha az utas lépeget a mozgólépcsőn, akkor az ideje:

$$\frac{s}{v_m + v_u} = \frac{s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}} = \frac{ab}{a+b}.$$

Vagyis $\frac{ab}{a+b}$ s alatt ér le az utas.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$x + y = \frac{1}{3}, \quad \cos \pi x \cdot \cos \pi y = \frac{1}{2}. \quad (14 \text{ pont})$$

Megoldás. Az első egyenletet π -vel beszorozva, majd mindkét oldal koszinuszát véve, kapjuk:

$$\cos(\pi x + \pi y) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

A megfelelő addíciós-tételt felhasználva adódik:

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \frac{1}{2}.$$

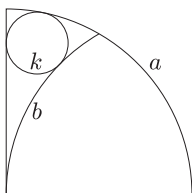
A $\cos \pi x \cdot \cos \pi y = \frac{1}{2}$ helyettesítést alkalmazva kapjuk: $\sin \pi x \cdot \sin \pi y = 0$.

A $\sin \pi x = 0$ egyenletből: $\pi x = k\pi$, ahonnan $x_1 = k$, $y_1 = \frac{1}{3} - k$, $k \in \mathbb{Z}$.

A $\sin \pi y = 0$ egyenletből: $\pi y = n\pi$, ahonnan $y_2 = n$, $x_2 = \frac{1}{3} - n$, $n \in \mathbb{Z}$.

A kapott valós számok valóban megoldásai az egyenletrendszernek.

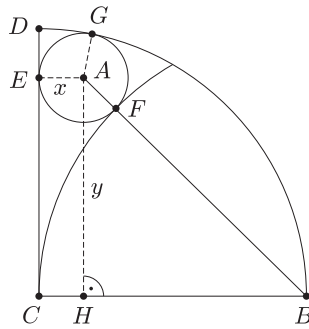
4. Az r sugarú negyedkör ívének (az ábrán az a körív) egyik végpontjából, mint középpontból rajzoljunk ugyancsak r sugarú körívet (ez a b körív), amely a negyedkör által meghatározott körcikket két részre osztja.



Számítsuk ki a kisebbik részbe írható k kör sugarát.

(14 pont)

Megoldás. Az ábra jelöléseit használva, tudjuk, hogy: $CB = CG = BF = r$.



A keresett kör sugara $x = AE = CH = AF = AG$, ekkor $AB = r + x$. Legyen $y = AH$, ekkor $AC = HB = r - x$.
 Az ACH háromszögben: $y^2 = (r - x)^2 - x^2 = r^2 - 2rx$.
 AHB háromszögben: $y^2 = (r + x)^2 - (r - x)^2 = 4rx$.
 Az egyenletek összevetéséből: $x = \frac{r}{6}$.

II. rész

5. Egy háromszög két csúcspontja $A(6; 10)$ és $B(2; 7)$, a harmadik csúcspont az $y = 2x + 3$ egyenletű egyenesen van. Határozzuk meg ezt a csúcspontot úgy, hogy a háromszög

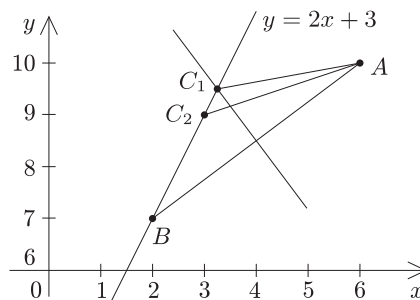
- AB alapú egyenlő szárú háromszög legyen;
- oldalainak négyzetösszege minimális legyen.

(16 pont)

Megoldás. a) Az AB felező merőleges egyenesének és a megadott egyenesnek a metszéspontja lesz a harmadik csúcs. Az AB felező merőlegesének egyenlete:

$$4x + 3y = \frac{83}{2}.$$

A keresett metszéspont koordinátái: $C_1 \left(\frac{13}{4}; \frac{19}{2} \right)$.



b) Kiszámítható, hogy $AB = 5$. A C pont koordinátái: $(x; 2x + 3)$, ekkor

$$AC = \sqrt{(x - 6)^2 + (2x - 7)^2}, \quad BC = \sqrt{(x - 2)^2 + (2x - 4)^2}.$$

A keresett négyzetösszeg:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 25 + (x - 6)^2 + (2x - 7)^2 + (x - 2)^2 + (2x - 4)^2 = 10x^2 - 60x + 130.$$

A másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, ezért minimumhelye van.

A minimumhely: $x_{\min} = \frac{60}{2 \cdot 10} = 3$.

Így a háromszög harmadik csúcspontjának koordinátái: $C_2(3; 9)$.

6. a) Az $y = -x^2 + 6x$ és az $y = x^2 - 4x + 8$ egyenletű parabolák által bezárt síkidom területét az $x = p$ egyenletű egyenes felezi. Határozzuk meg p értékét.

b) *Forgassuk meg az $y = -x^2 + 6x$ és az $y = x^2 - 4x + 8$ egyenletű parabolák által bezárt síkidomot az x tengely körül. Határozzuk meg a keletkező test térfogatát.* (16 pont)

Megoldás. a) Végezzük el a következő átalakításokat:

$$y = -x^2 + 6x = -(x - 3)^2 + 9,$$

$$y = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4.$$

Az egyik parabola tengelypontja: $C_1(3; 9)$, a másik paraboláé: $C_2(2; 4)$.

Belátható, hogy a keletkezett síkidom a C_1C_2 szakasz $F\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{2}\right)$ felezőpontjára középpontosan szimmetrikus.
Vagyis az $x = \frac{5}{2}$ egyenletű egyenes felezi a parabolák által bezárt síkidom területét, azaz $p = \frac{5}{2}$.

b) A két parabola metszéspontját kiszámítjuk: $A(1; 5)$, $B(4; 8)$. A keresett térfogat:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 (-x^2 + 6x)^2 dx - \pi \int_1^4 (x^2 - 4x + 8)^2 dx = \\ &= \pi \int_1^4 (-4x^3 + 4x^2 + 64x - 64) dx = \pi \left[-x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 32x^2 - 64x \right]_1^4 = 117\pi. \end{aligned}$$

7. A Csoki Gyárban a fogyasztóvédelmi ellenőrzés során megállapították, hogy 0,95 valószínűséggel van pontosan az előírt (szabványos) 40 szem cukorka a zacskóban, s csak 0,05 eséllyel több vagy kevesebb.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 5 zacskót. Mekkora a valószínűsége annak, hogy mindegyikben pontosan 40 szem cukorka lesz?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább két zacskót találunk az öt zacskó között, amelyek nem szabványosak?

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 100 zacskó között pontosan 95 szabványos lesz? (16 pont)

Megoldás. a) Minden dobozban 0,95 eséllyel van 40 szem cukorka. Így a megoldás: $0,95^5 \approx 0,774$.

b) Nem kedvező eset, ha mindegyik szabványos, aminek a valószínűsége $0,95^5$ (lásd az előző esetet). Nem kedvező az sem, ha pontosan egy nem szabványos zacskót választottunk ki. Ennek valószínűsége: $5 \cdot 0,95^4 \cdot 0,05$.

Így a kedvező eset valószínűsége: $1 - (0,95^5 + 5 \cdot 0,95^4 \cdot 0,05) \approx 0,0226$.

c) $\binom{100}{95} \cdot 0,95^{95} \cdot 0,05^5 \approx 0,1800$.

8. Egy cég 10 millió Ft-tal támogat egy egyetemet. A pénzüsszeget beteszik egy bankba 7% éves kamatra. A feltételek alapján 15 millió Ft-ot el kell érnie az összegnek, majd az azt követő 20 évben ösztöndíjként minden év elején a legjobb 10 első diáknak kell kiosztani egyenlő arányban úgy, hogy az utolsó kifizetéskor fogyjon el a pénz. Az összeg közben folyamatosan kamatozik, az éves kamat mindvégig 7%.

a) Hány év múlva kezdik el folyósítani az ösztöndíjakat?

b) Mennyi pénzt kap egy-egy hallgató? (16 pont)

Megoldás. a) Az eltelt idő legyen: n év. Felírható: $10 \cdot 1,07^n \geq 15$. Ebből kapjuk, hogy

$$n > \frac{\lg 1,5}{\lg 1,07} \approx 5,99.$$

Vagyis 6 év múlva kezdik folyósítani az ösztöndíjat.

b) 7. év elejére felnövekedett összeg: 15 007 304 Ft (legyen a), minden év elején kifizetett összes ösztöndíj: x . Első ösztöndíj kifizetése utáni összeg: $a - x$, év végére: $(a - x) \cdot 1,07 = 1,07a - 1,07x$. Második ösztöndíj után: $1,07a - 1,07x - x$, év végére: $1,07^2 a - 1,07^2 x - 1,07x$.

A gondolatmenetet folytatva a 20. ösztöndíj kifizetése után:

$$1,07^{19} a - 1,07^{19} x - 1,07^{18} x - \dots - x.$$

Ez a feltétel alapján nullával egyenlő. Vagyis: $1,07^{19} a - x(1,07^{19} + 1,07^{18} + \dots + 1) = 0$.

A zárójelben álló 20 tagú kifejezés összege:

$$S_{20} = \frac{1,07^{20} - 1}{1,07 - 1} \approx 40,995.$$

Így felírható: $1,07^{19} \cdot 15\,007\,304 - 40,995x = 0$, ebből $x = 1\,323\,926$. Így minden évben egy hallgató 132 393 Ft-ot kap.

9. A , B és C város azonos tengerszint feletti magasságban háromszöget alkot, ahol A és B távolsága 53 km, B és C távolsága 45 km, A és C távolsága 28 km. A és B város közti távolság A -hoz közelebbi harmadoló pontjában egy 800 m magas viharjelző tornyot építettek.

a) Az A városból mekkora szögben látszik a torony teteje?

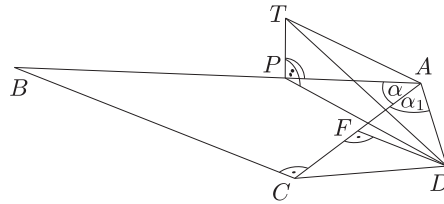
b) A és C várostól egyaránt 20 km-re lévő D városból légvonalban milyen messze van a torony teteje? (16 pont)

Megoldás. a) A torony alja legyen P , a teteje pedig T . A TPA derékszögű háromszögben felírható:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,8}{\frac{53}{3}} = 0,0453, \quad \alpha \approx 2,59^\circ.$$

b) Két elhelyezkedés lehet.

1. eset: Az 1. ábra jelöléseit használjuk.



1. ábra

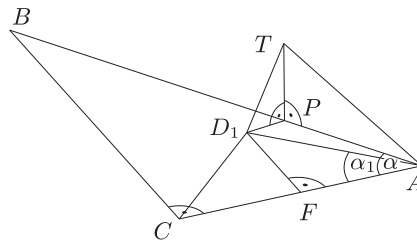
Az AFD háromszögben $\cos \alpha_1 = \frac{14}{20}$, azaz $\alpha_1 \approx 45,57^\circ$. Mivel $53^2 = 45^2 + 28^2$, azért ABC derékszögű háromszög. Vagyis $\sin \alpha = \frac{45}{53}$, azaz $\alpha \approx 58,11^\circ$.

A PDA háromszögben felírjuk a koszinusztételt:

$$PD^2 = \left(\frac{53}{3}\right)^2 + 20^2 - 2 \cdot \frac{53}{3} \cdot 20 \cdot \cos(\alpha + \alpha_1), \quad \text{ebből } PD \approx 29,65.$$

A TPD háromszögben felírjuk a Pitagorasz-tételt: $0,8^2 + 29,65^2 = TD^2$, $TD \approx 29,66$.

2. eset: A 2. ábra jelöléseit használjuk.



2. ábra

$D_1AP = \alpha - \alpha_1 = 12,54^\circ$. A PD_1A háromszögben felírjuk a koszinusztételt:

$$PD_1^2 = \left(\frac{53}{3}\right)^2 + 20^2 - 2 \cdot \frac{53}{3} \cdot 20 \cdot \cos 12,54^\circ, \quad \text{ebből } PD_1 = 4,72.$$

A TPD_1 derékszögű háromszögben: $TD_1 = 4,79$.

A kért távolság vagy kb. 29,66 km vagy kb. 4,79 km.