Könnyen látható, hogy $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$ és $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = (\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)^4 + 4(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)^2 + 2$, ezért $\operatorname{tg} 2x = u$ helyettesítéssel

$$f(u) = \left(\frac{2}{u}\right)^4 + 4\left(\frac{2}{u}\right)^2 + 2.$$

Ennek alapján:

$$f(\sin x) + f(\cos x) = \left(\frac{2}{\sin x}\right)^4 + 4\left(\frac{2}{\sin x}\right)^2 + \left(\frac{2}{\cos x}\right)^4 + 4\left(\frac{2}{\cos x}\right)^2 + 4,$$

és némi átalakítás után a bizonyítandó állítás:

$$\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 12. \tag{2}$$

A számtani és a mértani közép közötti összefüggést (2) bal oldalán álló pozitív számokra alkalmazva:

$$\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}} = \frac{8}{\sin^2 2x} \geq 8,$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}} = \frac{8}{|\sin 2x|} \geq 4.$$

Ezek összege éppen (2)-t adja. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $|\sin 2x| = 1$, tehát ha $x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$ (k egész).

Ruisz Tibor (Körmend, Kölcsey F. Gimn., IV. o. t.)