I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $$\frac{x+3}{3}=\frac{x^2+3x-4}{2x^2+4x-16}\cdot(x+3);$$

b) $$\lg\left(6^x-96\right)-2=\lg 2+\lg 6.$$

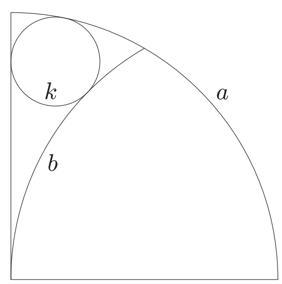
(*11 pont*)

2. Egy metró mozgólépcsőjén egy táska a másodperc alatt ér le a metrószintre. Egy utas b másodperc alatt teszi meg ugyanezt az utat a nem működő mozgólépcsőn. Mennyi idő alatt ér le az utas a metrószintre a működő mozgólépcsőn, ha közben ugyanúgy lépeget, mint akkor, amikor nem működik? (*12 pont*)

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$x+y=\frac{1}{3},\qquad \cos\pi x\cdot\cos\pi y=\frac{1}{2}.$$ (*14 pont*)

4. Az r sugarú negyedkör ívének (az *ábrán* az a körív) egyik végpontjából, mint középpontból rajzoljunk ugyancsak r sugarú körívet (ez a b körív), amely a negyedkör által meghatározott körcikket két részre osztja.



Számítsuk ki a kisebbik részbe írható k kör sugarát. (*14 pont*)

II. rész

5. Egy háromszög két csúcspontja $A(6;10)$ és $B(2;7)$, a harmadik csúcspont az $y=2x+3$ egyenletű egyenesen van. Határozzuk meg ezt a csúcspontot úgy, hogy a háromszög

a) AB alapú egyenlő szárú háromszög legyen;

b) oldalainak négyzetösszege minimális legyen. (*16 pont*)

6. *a*) Az $y=-x^2+6x$ és az $y=x^2-4x+8$ egyenletű parabolák által bezárt síkidom területét az $x=p$ egyenletű egyenes felezi. Határozzuk meg p értékét.

b) Forgassuk meg az $y=-x^2+6x$ és az $y=x^2-4x+8$ egyenletű parabolák által bezárt síkidomot az x tengely körül. Határozzuk meg a keletkező test térfogatát. (*16 pont*)

7. A Csoki Gyárban a fogyasztóvédelmi ellenőrzés során megállapították, hogy 0,95 valószínűséggel van pontosan az előírt (szabványos) 40 szem cukorka a zacskóban, s csak 0,05 eséllyel több vagy kevesebb.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 5 zacskót. Mekkora a valószínűsége annak, hogy mindegyikben pontosan 40 szem cukorka lesz?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább két zacskót találunk az öt zacskó között, amelyek nem szabványosak?

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 100 zacskó között pontosan 95 szabványos lesz? (*16 pont*)

8. Egy cég 10 millió Ft-tal támogat egy egyetemet. A pénzösszeget beteszik egy bankba 7% éves kamatra. A feltételek alapján 15 millió Ft-ot el kell érnie az összegnek, majd az azt követő 20 évben ösztöndíjként minden év elején a legjobb 10 elsős diáknak kell kiosztani egyenlő arányban úgy, hogy az utolsó kifizetéskor fogyjon el a pénz. Az összeg közben folyamatosan kamatozik, az éves kamat mindvégig 7%.

a) Hány év múlva kezdik el folyósítani az ösztöndíjakat?

b) Mennyi pénzt kap egy-egy hallgató? (*16 pont*)

9. A, B és C város azonos tengerszint feletti magasságban háromszöget alkot, ahol A és B távolsága 53 km, B és C távolsága 45 km, A és C távolsága 28 km. A és B város közti távolság A-hoz közelebbi harmadoló pontjában egy 800 m magas viharjelző tornyot építettek.

a) Az A városból mekkora szögben látszik a torony teteje?

b) A és C várostól egyaránt 20 km-re lévő D városból légvonalban milyen messze van a torony teteje? (*16 pont*)