I. megoldás. Az $|a_i| = |a_{i-1}+1|$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha $a_i^2 = (a_{i-1}+1)^2$, azaz ha $a_i^2 = a_{i-1}^2 + 2a_{i-1} + 1$. Toldjuk meg a sorozatot 1 taggal, legyen tehát $i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n+1$. Ezeket az összefüggéseket összeadva kapjuk, hogy

$$a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n,$$

ahonnan

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_{n+1}^2 - a_1^2 - n}{2} = \frac{a_{n+1}^2}{2} - \frac{n}{2} \geq -\frac{n}{2},$$

amit bizonyítanunk kellett.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_{n+1} = a_n + 1 = 0$, azaz ha $a_n = -1$. Megállapíthatjuk, hogy ebben az esetben n szükségképpen páros, hiszen sorozatunk szomszédos tagjai abszolút értékben mindig 1-gyel különböznek egymástól.

Strádl János (Kisbér, Táncsics M. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. A bizonyítandó összefüggés azt fejezi ki, hogy a feladatban szereplő számsorozat tagjainak átlagértéke nem kisebb $\left(-\frac{1}{2}\right)$-nél. Ezt fogjuk bizonyítani.

Feltehetjük, hogy az a_i számok között negatív szám is előfordul, különben az állítás nyilvánvalóan igaz. Így a sorozat legalább két tagú.

A sorozatban az első negatív számot egy nem negatív szám előzi meg. Legyen ez a_k. Mivel most $a_{k+1} < 0$ és $a_k \geq 0$, ezért $|a_{k+1}| = |a_k + 1|$ alapján $a_{k+1} = -a_k - 1$. Ezek szerint $a_k + a_{k+1} = -1$, azaz a szóban forgó két szám átlagértéke $-\frac{1}{2}$. E két számot elhagyva a sorozatból – ha marad még számunk – a felírt sorrendben a képzési szabálynak megfelelő $(n-2)$ tagból álló sorozatot nyerünk. Most ugyanis $|a_{k+2}| = |a_{k+1}+1| = |a_k|$, de mivel $|a_k| = |a_{k-1}+1|$, ezért $|a_{k+2}| = |a_{k-1}+1|$, vagyis a_{k+2} tekinthető úgy is, mint az a_{k-1} után következő tag. Problémát csak az jelenthet, ha $k = 1$, vagyis nincs a_k-t megelőző tag. Ebben az esetben $a_2 = -1$ és $a_3 = 0$. a_1 és a_2 elhagyásakor tehát nem marad előttük levő elem, viszont a_3 átveszi a_1 szerepét.

A sorozatban balról jobbra haladva a negatív számokat az őket megelőző nem negatív taggal együtt sorban elhagyva véges számú lépésben elérhetjük, hogy csak nem negatív számok maradnak a sorozatban, vagy pedig egyáltalán nem marad elemünk. Miután sem az elhagyott, sem a megmaradó számok átlagértéke nem kisebb $\left(-\frac{1}{2}\right)$-nél, ezért ezt az eredeti sorozatot alkotó valamennyi szám átlagértékéről elmondhatjuk.

Fodor László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)