1. A helyes válasz: (X). Ha a_n jelöli a $\sum_{i=1}^{n} i$ összeg maradékát 10-zel osztva, akkor egyszerű számolással $a_{n+20} = a_n$ adódik. Elég tehát azt meghatározni, hogy 3^{2006} milyen maradékot ad 20-szal osztva.

$$3^{2006} \equiv 1 \pmod 4 \quad \text{és} \quad 3^{2006} = 9^{1003} \equiv -1 \pmod 5.$$

Az első kongruencia 5-szöröséből kivonva a második négyszeresét, azt kapjuk, hogy $3^{2006} \equiv 9 \pmod{20}$. Így $a_{3^{2006}} = a_9 = 5$.

2. A helyes válasz: (X). Ha a Föld r sugarú, homogén tömegeloszlású gömb lenne, amely R sugarú pályán kering a Nap körül, akkor a kérdéses arány

$$\frac{\frac{1}{2} m R^2 \omega_{\text{kering}}^2}{\frac{1}{2}\,\frac{2}{5} m r^2 \omega_{\text{forog}}^2} = \frac{5}{2}\left(\frac{R}{r}\cdot\frac{T_{\text{forog}}}{T_{\text{kering}}}\right)^2 = \frac{5}{2}\left(\frac{150\,000\,000}{6370}\cdot\frac{1}{365}\right)^2 \approx 10\,400$$

lenne. Ez éppen egy kicsivel kevesebb, mint 11 000. Mégsem a (2)-es válasz a helyes, hiszen a Föld nem egyenletes tömegeloszlású, a belső magja sokkal nagyobb sűrűségű, mint a külső kéreg és a köpeny. Emiatt a Föld tehetetlenségi nyomatéka bizonyosan kisebb, mint a fenti képletben szereplő érték, a mozgási és a forgási energia aránya pedig nagyobb, mint 11 000.

3. A helyes válasz: (2). Felhasználva, hogy $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, illetve a $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ addíciós formulákat, az átrendezett feltétel tangensét véve kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right] = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{xy}}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{3} = \frac{x+y}{xy-1}.$$

Innen rendezés után $xy - 3x - 3y = 1$, amit $(x-3)(y-3) = 10$ alakba írva leolvasható, hogy két megoldás van: $x = 4$, $y = 13$ és $x = 5$, $y = 8$.

4. A helyes válasz: (X). Adott össztöltés (N elemi töltés) esetén a Coulomb-erő (ami a töltések szorzatával arányos) akkor a legnagyobb, ha mindkét vízcsepp ugyanakkora, $Ne/2$ töltésű. A két erő – az m tömegű cseppek közötti x távolságtól függetlenül – akkor lesz egyenlő, ha

$$\gamma\,\frac{m^2}{x^2} = k\left(\frac{N}{2}\right)^2\frac{e^2}{x^2},$$

ahonnan az adatok behelyettesítése után $N \approx 7$ adódik. Ez a meglepő eredmény is érzékelteti, hogy mennyire gyenge a gravitációs kölcsönhatás az elektrosztatikus mellett.

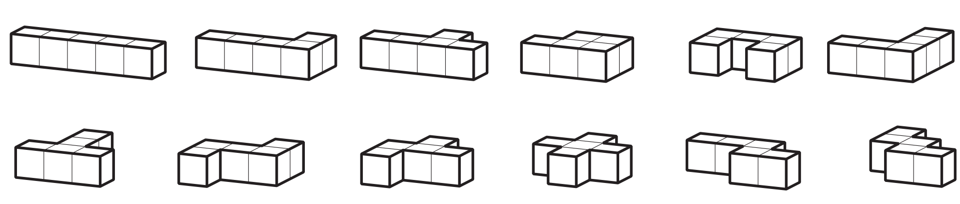
5. A helyes válasz: (X). A gyakoriságok: 0 – 99 999 485 134; 1 – 99 999 945 664;
2 – 100 000 480 057; 3 – 99 999 787 805; 4 – 100 000 357 857; 5 – 99 999 671 008;
6 – 99 999 807 503; 7 – 99 999 818 723; 8 – 100 000 791 469; 9 – 99 999 854 780.

6. A helyes válasz: (1). Határozzuk meg annak a vízcseppnek a sugarát, amelynél a kétféle energia nagyságrendileg egyenlő lenne. A felületi energia $4\pi R^2 \alpha$, ahol R a csepp sugara. A ϱ sűrűségű csepp tömege: $m = \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho$, a gravitációs kötési energia pedig kb. $\gamma\frac{m^2}{R}$, hiszen a csepp egyes darabkáinak *átlagos* távolsága hozzávetőleg R. (Az integrálszámítással megkapható pontosabb képlet tartalmaz még egy $\frac{3}{5}$-ös szorzótényezőt, de mivel csak nagyságrendi becslésre törekszünk, ezt a faktort a továbbiakban elhagyjuk.) A kétféle energia akkor lenne egyenlő, ha

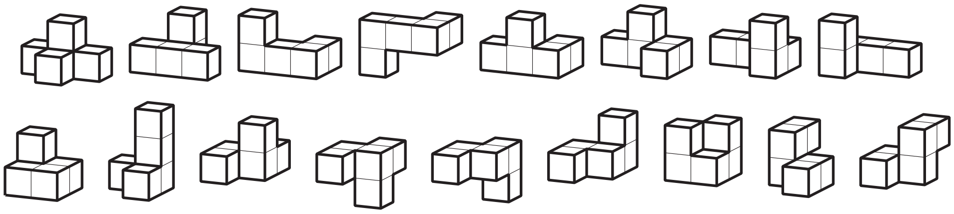
$$\gamma\left(\frac{4\pi}{3}R^3\varrho\right)^2\frac{1}{R} = 4\pi R^2\alpha, \quad \text{azaz ha} \quad R = \sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}\,\frac{\alpha}{\gamma\varrho}} \approx 10\ \text{m}$$

lenne. Ez sokkal nagyobb, mint egy emberfej, s mivel a sugár növekedtével a gravitációs tér energiája sokkal gyorsabban (R^5 szerint) nő, mint az R^2-tel arányos felületi energia, az emberfej nagyságú vízcsepp felületi energiája sokkal nagyobb, mint a gravitációs terének energiája.

7. A helyes válasz: (X). Az alábbi 12 „síkbeli”:



és további 17 „térbeli” alakzatot:



összesen tehát 29 különböző (egymásba eltolással és forgatással át nem vihető) testet lehet összeállítani.

8. A helyes válasz: (1). Az mg gravitációs erő és K közegellenállási erő együttes hatására mozgó golyó mozgásegyenlete

$$mg - K = ma, \qquad \text{azaz} \qquad a = g - k\frac{v^2}{\varrho R},$$

ahol k állandó. (Kihasználtuk, hogy K a sebesség négyzetével is és a golyó keresztmetszetével is arányos, tehát $K \sim v^2R^2$, továbbá $m \sim \varrho R^3$.) A két golyó akkor mozog ugyanolyan módon, ha a ϱR szorzat mindkettőre ugyanakkora, vagyis ha a fagolyó nagyobb, mint a vasgolyó.

9. A helyes válasz: (2). (Lásd az **F. 1722.** feladat megoldását az 1972. évi februári számunkban.)

10. A helyes válasz: (2). A pingponglabdára ható közegellenállási erő és a tömeg hányadosa nagyobb, mint ugyanez a mennyiség a vasgolyónál. Emiatt a felfelé dobott pingponglabda nyilván hamarabb és alcsonyabban áll meg, mint a vasgolyó. A mozgás második feléről nem tudunk elemi úton határozott kijelentést tenni, hiszen a lefelé eső pingponglabda gyorsulása kisebb ugyan, mint a vasgolyóé, de az általa megtett út is rövidebb, mint a nehezebb golyóé. A mozgásegyenlet (amely a sebesség négyzetére nézve lineáris differenciálegyenlet) megoldható (lásd pl. Budó: Mechanika, 16. §), és a megoldásból leolvasható, hogy a nagyobb sűrűségű test ér hamarabb vissza.

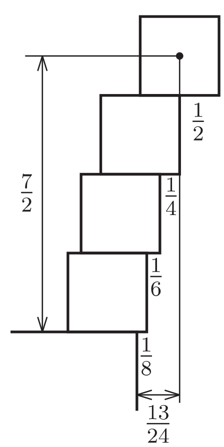
11. A helyes válasz: (2). (Lásd a **Gy. 1409.** gyakorlat megoldását az 1972. évi októberi számunkban.)

12. A helyes válasz: (X). A villámhárító vezetéke általában rézből készül, ennek anyagi állandóit (vezetőképesség, sűrűség és fajhő) ismerjük. A villámcsapás ideje a másodperc töredéke, innen kiszámíthatjuk, hogy a vezeték még $1\,^\circ$C-nyit sem melegszik fel.

13. A helyes válasz: (X) (Lásd az **F. 1775.** feladat megoldását az 1972. évi áprilisi számunkban.)

13+1. A helyes válasz: (X). A legfelső kocka középpontja 3,5 egység magasan van, az asztal szélétől pedig $\frac{13}{24}$ egységnyire „lóghat ki”, így az asztal szélétől mért távolsága (Pitagorasz tétele szerint) 3,541 egység. Ha viszont a tornyot az asztal sarkánál építjük fel, és mindkét irányban kilógatjuk az asztalról, a saroktól mért távolsága

$$d = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{24}\right)^2 + \left(\frac{13}{24}\right)^2} \approx 3{,}582 > 3{,}58.$$



*

Ez a TOTÓ nehezebbnek bizonyult a szokásosnál. A legtöbb találatot (8-at) *Sümegi Károly* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 12. o.t.) érte el. Összesen 32-en tippeltek, 7 szelvény volt 7 találatos. Legtöbben a 11. (utána a 3. és az 1.) megoldását találták el. A legkevesebb találatot a 13., majd a 2. és a 10. feladat kapta.