Egy merev test valamely rögzített tengely körüli forgómozgásának alapegyenlete:

$$M = \Theta\,\beta,$$

ahol M a testre ható külső erők forgatónyomatéka az adott tengelyre vonatkoztatva, β a test szöggyorsulása, Θ pedig a testnek az adott tengelyre vonatkoztatott *tehetetlenségi nyomatéka.* Látható, hogy Θ hasonló szerepet tölt be a forgómozgás leírásánál, mint az $F = ma$ mozgásegyenletben a tömeg. Az alábbiakban néhány, a tehetetlenségi nyomatékkal kapcsolatos tételt mutatunk be, és igazoljuk is azokat.

Egy adott tengelytől r távolságra lévő m tömegű tömegpont tehetetlenségi nyomatéka definíció szerint

((1)) $$\Theta = mr^2.$$

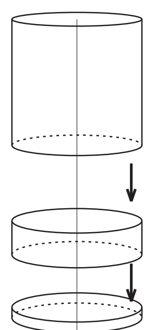
N darab tömegpontból álló rendszer tehetetlenségi nyomatéka az egyes tömegpontok tehetetlenségi nyomatékainak az *összege:*

((2)) $$\Theta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2,$$

ahol m_i az i-edik tömegpont tömege, r_i pedig a tengelytől mért távolsága.

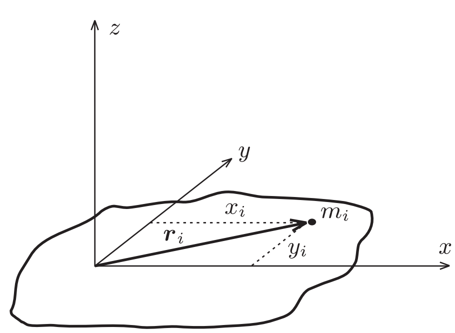
A (2) egyenletből következik, hogy több testből álló rendszer tehetetlenségi nyomatéka megegyezik az egyes testek tehetetlenségi nyomatékainak az összegével. Ez az ún. *addíciós tétel.*

Ugyancsak a (2) összefüggésből következő tulajdonság, hogy egy rendszer tehetetlenségi nyomatéka nem változik, ha annak pontjait a tengellyel párhuzamosan eltoljuk, és akkor sem változik meg a tehetetlenségi nyomaték, ha egy testet a kérdéses tengellyel párhuzamosan összelapítunk vagy megnyújtunk. Ez a megállapítás *lapítási tétel* néven ismert. Eszerint például egy homogén *hengernek,* egy lapos *korongnak* és egy (elméletileg végtelen vékony) *körlapnak* a körlapjukra merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka megegyezik, ha a testek tömege is és a sugara is ugyanakkora (*1. ábra*).



1. ábra

Ha egy lapos (síkbelinek tekinthető) test tehetetlenségi nyomatékát vizsgáljuk, érdekes megállapításra juthatunk. Tekintsük a testnek egy tetszőleges pontját! Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert, melynek origója ez a kiválasztott pont, z tengelye merőleges a lapos test síkjára, a másik két tengely pedig a *2. ábrán* látható módon a síkban fekszik.



2. ábra

A z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték az ábra jelöléseit és a (2) definíciót használva

((3)) $$\Theta_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2,$$

és mivel $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, fennáll

$$\Theta_z = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2. \tag{(4)}$$

Vegyük észre, hogy (4) jobb oldalának első tagja nem más, mint az y tengelyre vonatkozó $\Theta_y = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2$, második tagja pedig az x tengelyre vonatkozó $\Theta_x = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2$ tehetetlenségi nyomaték, hiszen az összegekben az egyes tömegpontok tömegének és az adott tengelytől mért távolság négyzetének szorzata szerepel. Lapos testekre érvényes tehát a

$$\Theta_z = \Theta_x + \Theta_y \tag{(5)}$$

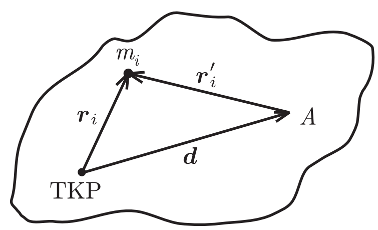
összefüggés, azaz egy lapos testnek a lapjára merőleges, egyébként tetszőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka megegyezik a tengelyt metsző, két egymásra merőleges, a síklapban fekvő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték összegével. Ezt a tételt *poláris-ekvatoriális tételnek* hívjuk.

Végül igazoljuk a – KöMaL olvasói közül bizonyára sokaknak ismerős – *Steiner-tételt,* miszerint a tömegközépponton (TKP) átmenő tengellyel párhuzamos, attól d távolságra lévő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta = \Theta^{(\mathrm{TKP})} + md^2,$$

ahol m a test tömege, $\Theta^{(\mathrm{TKP})}$ a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

Tekintsünk először egy lapos testet! A tömegközépponton és az A ponton átmenő tengelyek legyenek merőlegesek a test síkjára (lásd a *3. ábrát!*)



3. ábra

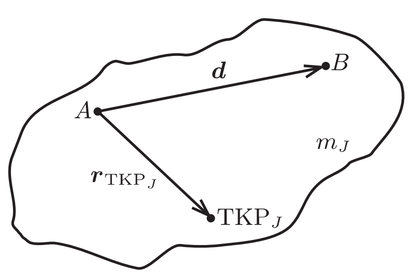
A testet kicsiny tömegpontokra bontva az i-edik tömegpontba mutató $\boldsymbol{r}_i$ és $\boldsymbol{r}_i'$ vektorok közötti kapcsolat $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{d}$. A tengelyek távolsága $|\boldsymbol{d}| = d$. Az A ponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta^{(A)} = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i'}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{d})^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2 - 2\boldsymbol{d}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i\right) + md^2 = \tag{6}$$

$$= \Theta^{(\mathrm{TKP})} + md^2,$$

ahol kihasználtuk, hogy a tömegközéppont definíciója szerint $\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i = 0$. Ezzel lapos testre beláttuk a Steiner-tételt.

Vizsgáljunk most egy tetszőleges (tehát nem lapos) merev testet! Osszuk fel a szóban forgó testet M darab lapos szeletre olyan síkokkal, amelyek merőlegesek egy – a TKP-n átmenő – tetszőlegesen kiválasztott tengelyre. A *4. ábrán* a J-edik ilyen szelet látható, jelöljük ennek tömegét m_J-vel. (A nagybetűs index használata arra utal, hogy itt most nem tömegpontokról, hanem lapos szeletekről beszélünk.)



4. ábra

A merev test tömegközéppontján átmenő tengely a lapos szelet síkjának A pontján, egy vele párhuzamos másik tengely pedig a B pontján halad keresztül. A 4. ábrán a vizsgált szelet tömegközéppontját (TKP_J) is feltüntettük. A szelet A és B pontján, valamint saját tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának kapcsolata a (6) összefüggés és a 4. ábra alapján:

(7)
$$\Theta_J^{(A)} = \Theta_J^{(\mathrm{TKP})} + m_J\, r^2_{\mathrm{TKP}_J},$$

(8)
$$\begin{aligned}\Theta_J^{(B)} &= \Theta_J^{(\mathrm{TKP})} + m_J(\boldsymbol{r}_{\mathrm{TKP}_J} - \boldsymbol{d})^2 = \\ &= \Theta_J^{(\mathrm{TKP})} + m_J d^2 - 2\boldsymbol{d}(m_J\,\boldsymbol{r}_{\mathrm{TKP}_J}) + m_J\, r^2_{\mathrm{TKP}_J}.\end{aligned}$$

A (7) és (8) összefüggésekből

((9))
$$\Theta_J^{(B)} = \Theta_J^{(A)} + m_J d^2 - 2\boldsymbol{d}(m_J\,\boldsymbol{r}_{\mathrm{TKP}_J})$$

adódik. Az addíciós tétel szerint a merev test tömegközéppontján átmenő tengelyre, illetve egy azzal párhuzamos, tőle d távolságra levő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok közötti összefüggés:

((10))
$$\Theta^{(B)} = \sum_{J=1}^{M} \Theta_J^{(B)} = \sum_{J=1}^{M} \left[\Theta_J^{(A)} + m_J d^2 - 2\boldsymbol{d}(m_J\,\boldsymbol{r}_{\mathrm{TKP}_J})\right] = \Theta^{(A)} + md^2.$$

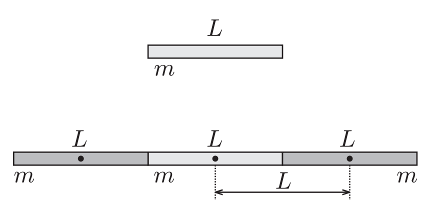
(Ismét kihasználtuk, hogy a tömegközéppont definíciója szerint $\sum\limits_{J=1}^{M} m_J\,\boldsymbol{r}_{\mathrm{TKP}_J} = 0$.) Ezzel a Steiner-tételt általánosan igazoltuk.

Az előző tételek ismerete lehetővé teszi, hogy bizonyos esetekben elemi módszerekkel is meghatározhassuk egy-egy test tehetetlenségi nyomatékát.

1. példa. Határozzuk meg egy m tömegű, L hosszúságú, homogén tömegeloszlású vékony rúd tehetetlenségi nyomatékát a hossztengelyére merőleges tömegközépponti tengelyre!

Megoldás. Jelöljük a kérdéses tehetetlenségi nyomatékot $\Theta_{m,L}$-lel, ahol az index a rúd tömegére és a hosszára utal. Hosszabbítsuk meg gondolatban a vizsgált rudat olymódon, hogy mindkét végéhez egy-egy, az eredetivel megegyező tömegű és hosszúságú rudat erősítünk (*5. ábra*). Ekkor egy $3m$ tömegű és $3L$ hosszúságú testet kapunk. Ennek tehetetlenségi nyomatéka az addíciós tétel és a Steiner-tétel felhasználásával így számítható:

((11))
$$\Theta_{3m,3L} = \Theta_{m,L} + 2(\Theta_{m,L} + mL^2).$$



5. ábra

Másrészt viszont (2) alapján nyilván igaz, hogy

$$\Theta_{3m,3L} = 3\cdot\Theta_{m,3L} \qquad \text{és} \qquad \Theta_{m,3L} = 3^2\cdot\Theta_{m,L},$$

vagyis

((12))
$$\Theta_{3m,3L} = 27\cdot\Theta_{m,L}.$$

(11) és (12) összevetéséből a vékony rúd tehetetlenségi nyomatékára

((13))
$$\Theta_{m,L} = \frac{1}{12}mL^2$$

adódik.

2. példa. Határozzuk meg egy m tömegű, R sugarú, homogén tömegeloszlású vékonyfalú gömbhéj (például egy pingponglabda) tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre! (Felhasználhatjuk, hogy egy homogén, tömör gömb tehetetlenségi nyomatéka $\dfrac{2}{5}mR^2$.)

Megoldás. Jelöljük a gömbhéj vastagságát h-val ($h \ll R$), és számítsuk ki a gömbhéj sűrűségét! Mivel a térfogata

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{4\pi}{3}(R-h)^3 = 4\pi\, R^2 h\left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2}\right) \approx 4\pi\, R^2 h,$$

a sűrűség jó közelítéssel

$$\varrho = \frac{m}{4\pi R^2 h}. \tag{(14)}$$

A gömbhéj keresett Θ tehetetlenségi nyomatékát az addíciós tétel felhasználásával határozhatjuk meg. A gömbhéj és egy $(R-h)$ sugarú tömör gömb együtt egy R sugarú tömör gömböt képez, így fennáll

$$\Theta + \frac{2}{5}(R-h)^2 \cdot \frac{4\pi}{3}(R-h)^3 \varrho = \frac{2}{5}R^2 \cdot \frac{4\pi}{3}R^3 \varrho,$$

ahonnan (14) felhasználásával és algebrai átalakítások után kapjuk:

$$\Theta = \frac{8\pi}{15}\varrho\left[R^5 - (R-h)^5\right] \approx \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{m}{4\pi R^2 h} \cdot 5R^4 h = \frac{2}{3}mR^2. \tag{(15)}$$

3. példa. Határozzuk meg egy m tömegű, R külső és r belső sugarú, L hosszúságú, homogén tömegeloszlású egyenes cső tehetetlenségi nyomatékát a hossztengelyére merőleges tömegközépponti tengelyre! (Felhasználhatjuk az 1. példa végeredményét, valamint azt, hogy egy homogén, tömör rúd tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére vonatkoztatva $mR^2/2$.)

Megoldás. Szeleteljük fel a testet a forgástengelyére merőlegesen sok vékony, Δz vastagságú, külön-külön már laposnak tekinthető „körgyűrűre". Egy-egy ilyen darabka tömege

$$\Delta m = m\,\frac{\Delta z}{L}, \tag{(16)}$$

a síkjára merőleges, tömegközépponti tengelyre vonatkozó Θ_1 tehetetlenségi nyomatéka pedig – az addíciós tétel értelmében – egy R és egy r sugarú tömör korong tehetetlenségi nyomatékának különbségeként áll elő. Mivel a test sűrűsége

$$\varrho = \frac{m}{\pi L(R^2 - r^2)}, \tag{(17)}$$

a körgyűrű-szelet tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}(\varrho R^2 \pi \Delta z)R^2 - \frac{1}{2}(\varrho r^2 \pi \Delta z)r^2. \tag{(18)}$$

Ez (16) és (17) felhaszanálásával így is felírható:

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}\Delta m(R^2 + r^2). \tag{(19)}$$

Minket azonban nem ez (a lapos test síkjára merőleges tengelyhez tartozó), hanem a test *síkjában fekvő* tömegközépponti tengelyre vonatkozó Θ_2 tehetetlenségi nyomaték érdekel. A poláris-ekvatoriális tétel és a forgási szimmetria felhasználásával $\Theta_1 = \Theta_2 + \Theta_2$, azaz

$$\Theta_2 = \frac{\Theta_1}{2} = \frac{1}{4}\Delta m(R^2 + r^2). \tag{(20)}$$

Az egyes körgyűrű-szeletek tehetetlenségi nyomatéka a cső középpontján átmenő (a szeletke síkjától z távolságra fekvő) tengelyre vonatkoztatva a Steiner-tétel értelmében

$$\Delta\Theta = \frac{1}{4}\Delta m(R^2 + r^2) + \Delta m\, z^2. \tag{(21)}$$

Az egész cső tehetetlenségi nyomatéka a kérdéses tengelyre az addíciós tétel alkalmazásával kapható meg:

$$\Theta = \sum \Delta\Theta = \sum \frac{1}{4}\Delta m(R^2 + r^2) + \sum \Delta m\, z^2. \tag{(22)}$$

A jobb oldal utolsó tagja nem más, mint egy m tömegű, L hosszúságú rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúdra merőleges tömegközépponti tengelyre, ami a (13) összefüggés szerint $\frac{1}{12}mL^2$. Végeredményünk tehát:

$$\Theta = \frac{1}{4}m(R^2 + r^2) + \frac{1}{12}mL^2. \tag{(23)}$$