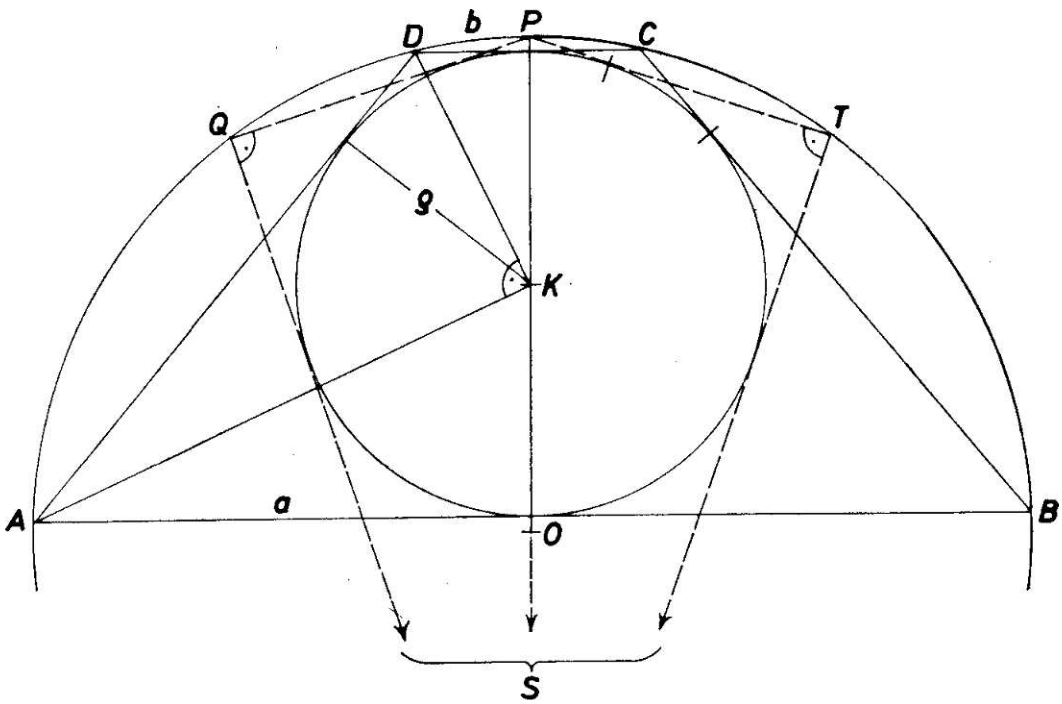
Legyen az $ABCD$ trapézban $AB \| CD$, $AB = 2a \geq 2b = CD$, a körülírt kör középpontja O, a beírt köré K. Mivel van beírt kör, azért $AD + BC = 2AD = 2(a+b)$, és a beírt kör átmérője a trapéz magasságaként

$$2\varrho = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab}, \quad \text{vagyis} \quad \varrho^2 = ab.$$



Másrészt $OK = 1/2$ alapján a két alap távolsága O-tól $\dfrac{1}{2} \mp \varrho$, ennélfogva

$$a^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2} - \varrho\right)^2 = \frac{3}{4} - \varrho^2 + \varrho, \quad b^2 = \frac{3}{4} - \varrho^2 - \varrho.$$

Ezeket behelyettesítve

$$\varrho^4 = a^2 b^2 = \left(\frac{3}{4} - \varrho^2\right)^2 - \varrho^2, \qquad \varrho = \sqrt{\frac{9}{40}} = 0{,}4743 \text{ egység.}$$

Megjegyzések. 1. Feladatunk – az előírt tengelyes szimmetria alapján – speciális esete a *bicentrikus négyszög*nek, amelynek *Euler–Fusz-féle relációját* éppen januári számunkban közöltük a 2161. feladat 3. megjegyzésében: $2\varrho^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$. Innen is

$$\varrho^2 = \frac{(R^2 - d^2)^2}{2(R^2 + d^2)} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 : \frac{10}{4} = \frac{9}{40}.$$

De az egyezés ne terelje el figyelmünket a lényegről! Tetszőleges érintőt véve a belső körhöz, majd ennek a külső körön levő P, Q pontjaiból megrajzolva a belső kör második érintőit, az ezek által kimetszett T és S pontokat összekötő húr „zárja az érintőnégyszöget”, érinti a kört.

2. Kiadódik a $\varrho^2 = ab$ összefüggés abból is, hogy a szögfelezők révén az ADK háromszög derékszögű, másrészt befogói átfogóként szerepelnek azokban a derékszögű háromszögekben, amelyekben a befogók a és ϱ, ill. b és ϱ.