

I. rész

1. Aladár szerint a háromjegyű, Barnabás szerint pedig az ötjegyű számok közül választva lesz nagyobb a valószínűsége annak, hogy a kapott számban van 6-os számjegy. Melyiküknek van igaza? (11 pont)

Megoldás. Könnyebb kiszámolni azt, hogy hány olyan szám van, amelyben nincs 6-os számjegy, aztán majd ezek számát kivonjuk az összes eset számából.

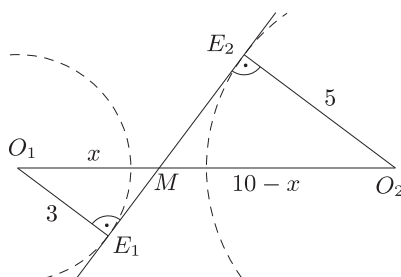
Az ötjegyűek között az első helyen nem lehet a 0 és a 6, a többi helyen pedig csak a 6 nem lehet. Tehát az esetek száma: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 52\,488$. Olyan ötjegyű szám, amelyben van 6-os összesen $90\,000 - 52\,488 = 37\,512$ db van.

Annak a valószínűsége, hogy 6-ost tartalmazó ötjegyű számot választunk: $\frac{37\,512}{90\,000} \approx 0,417$.

A háromjegyűek között olyan szám, amelyben nincs 6-os, $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ db van, így $900 - 648 = 252$ darabban van 6-os. Annak valószínűsége tehát, hogy 6-ost tartalmazó háromjegyű számot választunk: $\frac{252}{900} = 0,28$. Látható, hogy az ötjegyűek között nagyobb a valószínűsége a 6-ost tartalmazó szám kiválasztásának.

2. Adott egy 5 cm és egy 3 cm sugarú kör. A körök középpontja 10 cm-re van egymástól. Milyen távol van a kisebbik kör középpontjától a két kör közös belső érintőinek metszéspontja? (12 pont)

Megoldás. Ismeretes, hogy a belső érintők a középpontokat összekötő szakaszon metszik egymást.



A belső érintő megszerkesztésével két hasonló háromszög keletkezik, az O_1E_1M és az O_2E_2M .

A megfelelő oldalak arányából a következő egyenlethez jutunk: $\frac{10-x}{5} = \frac{x}{3}$ (x jelöli a kisebbik kör középpontjának és a belső érintők metszéspontjának a távolságát). A megoldás: $x = 3,75$ cm.

A kisebbik kör középpontjától 3,75 cm-re van a belső érintők metszéspontja.

3. Milyen maradékot ad $16^{101} + 8^{101} + 4^{101} + 2^{101} + 1$, ha elosztjuk $2^{100} + 1$ -gyel? (14 pont)

Megoldás. Felhasználjuk a következőket: $a + b \mid a^{2k} - b^{2k}$ és $a + b \mid a^{2k+1} + b^{2k+1}$.

Ezek alapján:

$$2^{100} + 1 \mid 2^{400} - 1, \quad \text{amiből következik, hogy } 2^{100} + 1 \mid 16^{101} - 16.$$

$$2^{100} + 1 \mid 2^{300} + 1, \quad \text{amiből következik, hogy } 2^{100} + 1 \mid 8^{101} + 8.$$

$$2^{100} + 1 \mid 2^{200} - 1, \quad \text{amiből következik, hogy } 2^{100} + 1 \mid 4^{101} - 4.$$

$$2^{100} + 1 \mid 2^{100} + 1, \quad \text{amiből következik, hogy } 2^{100} + 1 \mid 2^{101} + 2.$$

Ezek felhasználásával a feladatban szereplő összeget alakítsuk a következő módon:

$$16^{101} + 8^{101} + 4^{101} + 2^{101} + 1 = (16^{101} - 16) + (8^{101} + 8) + (4^{101} - 4) + (2^{101} + 2) + 11.$$

A zárójelben lévő különbségek, illetve összegek oszthatók $(2^{100} + 1)$ -gyel, ezért a maradék 11.

4. a) Melyek azok az $f(x)$ lineáris függvények, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség: $2f(x) + 3f(1-x) = 4x - 1$?

b) Milyen előjelű lehet c , ha az $ax^2 - bx + c$ kifejezés minden x értékre pozitív? (14 pont)

Megoldás. a) Helyettesítsünk x helyére $(1-x)$ -et: $2f(1-x) + 3f(x) = 3 - 4x$.

Így a következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\left. \begin{aligned} 2f(x) + 3f(1-x) &= 4x - 1, \\ 2f(1-x) + 3f(x) &= 3 - 4x. \end{aligned} \right\}$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $f(x) = -4x + \frac{11}{5}$. Erre a függvényre teljesülnek a feladat feltételei, így ez a megoldás.

b) A függvény értéke a 0 helyen c , így $c > 0$ szükséges. Ennél a feladat nem kérdez többet, így a válasz: c pozitív. Ez nyilván csak szükséges feltétel.

II. rész

5. Adjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenlet összes megoldását a $[0; 2\pi]$ intervallumon

$$3 \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0. \quad (16 \text{ pont})$$

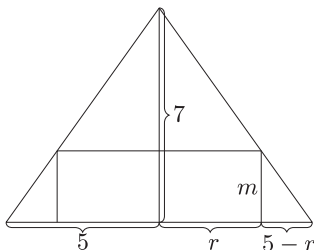
Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$ és $x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$, ahol k egész szám.

Vegyük észre, hogy $x + \frac{\pi}{3} = \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{2}$. Legyen $y = x - \frac{\pi}{6}$, így a következő egyenlet írható: $3 \operatorname{tg} \left(y + \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{tg} y = 0$. Mivel $\operatorname{tg} \left(y + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} y = -\frac{1}{\operatorname{tg} y}$, azért egyenletünk $-\frac{3}{\operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y = 0$ alakú lesz, amely ekvivalens a $\operatorname{tg}^2 y - 3 = 0$ egyenlettel.

Ennek megoldásaiból x -re a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ és $\frac{11\pi}{6}$ értékeket kapjuk a megadott intervallumon.

6. Legfeljebb milyen nagy térfogatú egyenes henger írható egy egyenes körkúpba, melynek alapköre 5 egység sugarú, magassága pedig 7 egység? (A henger és a kúp tengelye közös.) (16 pont)

Megoldás. Az ábra az egyenes körkúp tengelymetszetét mutatja. A henger alapkörének sugarát jelölje r ($0 < r < 5$), magasságát m . A hasonló háromszögekben: $\frac{5-r}{m} = \frac{5}{7}$, innen a henger magassága: $m = 7 - \frac{7}{5}r$.



A henger térfogata: $V = r^2 \pi m$, vagyis

$$V(r) = r^2 \pi \left(7 - \frac{7}{5}r \right) = -\frac{7\pi}{5}r^3 + 7r^2 \pi.$$

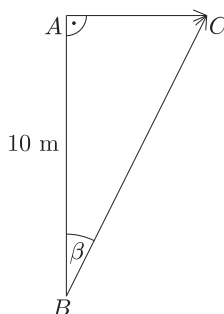
Deriválva: $V'(r) = -\frac{21\pi}{5}r^2 + 14r\pi$.

A $(0; 5)$ intervallumban ott lehet a $V(r)$ függvénynek szélsőértéke, ahol az első derivált 0. Az intervallum belsejében egyetlen zérushely van: $r = \frac{10}{3}$. Ellenőrizhető – például grafikusán –, hogy ezen a helyen a derivált előjelet vált. Mivel pozitívról vált negatívra, azért itt lokális maximuma van a függvénynek.

A maximális térfogatú henger magassága $\frac{7}{3}$, a térfogata pedig kb. 81,45.

7. Elindul egy kocsi és 2 m/s^2 gyorsulással halad egyenes úton. Erre az útra merőleges útról a mezőn átvágva 5 m/s egyenletes sebességgel egy ember szalad a kocsi felé. Hogyan válassza meg az indulási irányát, hogy fel tudjon ugrani a kocsira, ha az indulás pillanatában 10 m -re van a kocsitól? Mennyi idő múlva éri el a kocsit? (16 pont)

Megoldás. A rajzon a kocsi elmozdulása: \vec{AC} , az ember elmozdulása: \vec{BC} , és $AB = 10$ méter.



Jelölje C azt a pontot, ahol az ember felugrik a kocsira. Ha t sec alatt jut B -ből C -be, akkor ez az út $5t$ (méterben mérve). A kocsi által megtett utat az $s = \frac{a}{2}t^2$ összefüggés alapján határozhatjuk meg (a a gyorsulás), így $AC = \frac{2t^2}{2} = t^2$.

Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\sin \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{t^2}{5t} = \frac{t}{5}, \quad \cos \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{5t} = \frac{2}{t}.$$

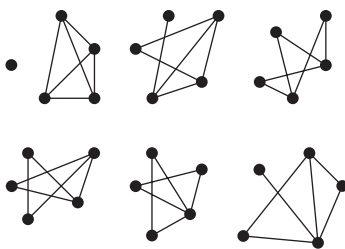
A megfelelő oldalakon álló kifejezéseket összeszorozva: $\sin \beta \cos \beta = \frac{2}{5}$, azaz $\sin 2\beta = \frac{4}{5}$. Innen $\beta = 26,57^\circ$ vagy $\beta = 63,43^\circ$. (Csak a hegyesszögű megoldásnak van értelme.)

Emberünk kétféle haladási irányt választhat. Ha az AB úthoz képest $26,57^\circ$ -os szögben fut, akkor kb. 2,24 sec múlva ugorhat fel a kocsira, ha pedig $63,43^\circ$ -os szögben indul, akkor kb. 4,47 sec múlva éri el a kocsit.

8. a) *Hány öt csúcsú, hat élű egyszerű gráf van, ha a csúcsokat megkülönböztetjük és hány, ha nem?*

b) *Janó lerajzolta az összes öt csúcsú, hat élű gráfot úgy, hogy a csúcsokat megkülönböztette. Lackó épp arra járt és rábökött egy csúcsra. Mi a valószínűsége, hogy ez a csúcs éppen elsőfokú volt?* (16 pont)

Megoldás. a) Ha a csúcsokat nem különböztetjük meg, hatféle gráfot tudunk rajzolni. A teljes 5 csúcsú gráf 10 élt tartalmaz. Közülük $\binom{10}{6}$ -féleképpen lehet hatot kiválasztani, ez éppen 210, ennyi olyan ötcsúcsú, hatélű gráf van, ha a csúcsokat megkülönböztetjük.



b) Kétféle gráfban van elsőfokú csúcs, mindkettőből 60 db-ot rajzolt fel Janó. Mindegyikben 1 db elsőfokú csúcs van, tehát 120 elsőfokú csúcs van a $210 \cdot 5 = 1050$ db csúcs között. Így a valószínűség: $\frac{120}{1050} = \frac{4}{35}$.

9. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\sqrt[3]{2x^2 - 8x} - \sqrt[3]{2x^2} = 2. \quad (16 \text{ pont})$$

Megoldás. Ha $x \geq 0$, akkor $\sqrt[3]{2x^2 - 8x} - \sqrt[3]{2x^2} \leq 0$, a nemnegatív számok körében nincs megoldása az egyenletnek. Legyen $x < 0$ és vezessük be a $t = -\frac{x}{2}$ új változót. Ekkor $t > 0$ és az egyenlet bal oldala

$$\sqrt[3]{8t^2 + 16t} - \sqrt[3]{8t^2} = 2(\sqrt[3]{t^2 + 2t} - \sqrt[3]{t^2}) < 2(\sqrt[3]{(t+1)^2} - \sqrt[3]{t^2}).$$

Az ábra az $f(t) = t^{\frac{2}{3}}$ függvény grafikonját mutatja a $t > 0$ halmazon. Látható, hogy a függvény megváltozása minden egységnyi hosszúságú intervallumon kisebb vagy egyenlő 1-nél (valójában az egyetlen $[0; 1]$ intervallum kivételével határozott egyenlőtlenség teljesül), így $2(f(t+1) - f(t)) \leq 2$. Az egyenlet bal oldala tehát minden valós x -re kisebb 2-nél, így nincs megoldása.

