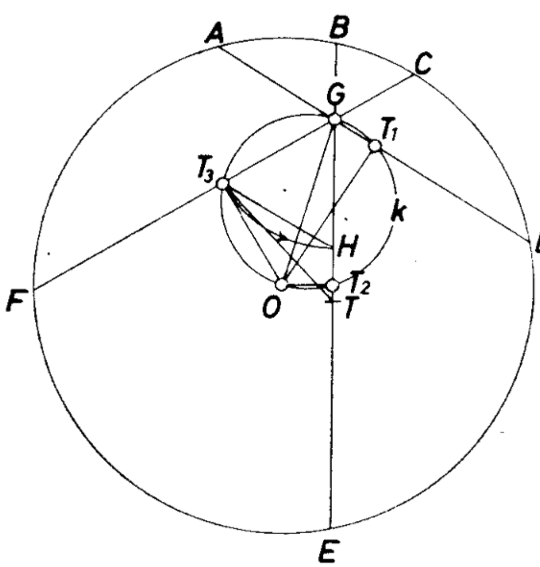
I. megoldás. Nyilvánvalóan elég foglalkoznunk a körülírt kör O középpontjától különböző G pontok esetével. Válasszuk úgy a betűzést, hogy BE legyen az O-hoz legközelebbi átló –, illetve a legközelebbiek egyike, ha több ilyen van – és EGF az a $60°$-os szögtartomány, amelyiknek a belsejében van O, esetleg éppen a GE szakaszon. Jelöljük még az AD, BE, CF szakasz felezőpontját (O vetületét e húrokon) rendre T_1, T_2, T_3-mal. Ekkor $OT_2 \leq OT_3$, $OGT_2\sphericalangle \leq OGT_3\sphericalangle$ és $OGD\sphericalangle \leq 90° \leq OGA\sphericalangle$, továbbá T_1, T_2, T_3 rendre a GD, GE, GF szakaszon van, esetleg $T_1 = G$ vagy $T_2 = O$. A bizonyítandó állítás így írható át:

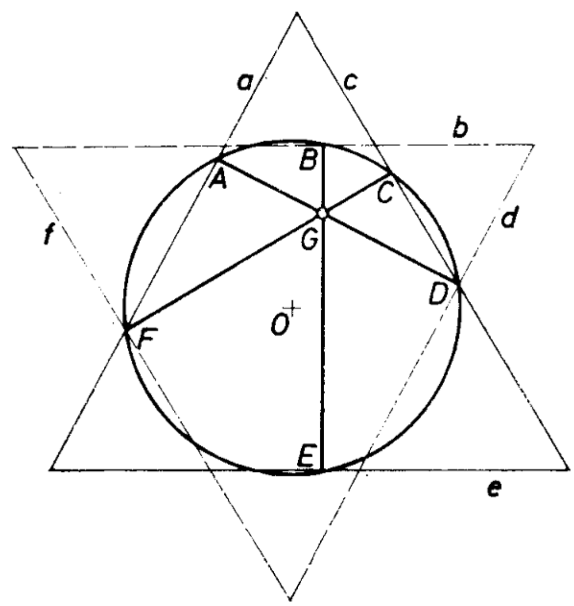
$$AT_1 - GT_1 + CT_3 - GT_3 + ET_2 + GT_2 = BT_2 - GT_2 + DT_1 + GT_1 + FT_3 + GT_3,$$

és ez ekvivalens a következővel:

(1) $$GT_2 = GT_1 + GT_3,$$

ezt bizonyítjuk.





T-pontjaink nyilvánvalóan az OG szakasz mint átmérő fölötti k Thalész-körön vannak. A $T_1T_2T_3$ háromszög szabályos, mert T_1T_2 és T_2T_3 oldalai G-ből $60 - 60°$-os szögben láthatók. Mérjük föl G-ből T_2 felé a $GH = GT_3$ szakaszt és csatlakozóan a $HT = GT_1$ szakaszt. Így HGT_3 szabályos háromszög és $T_3HT\sphericalangle = 120° = T_3GT_1\sphericalangle$, ezek szerint pedig a THT_3 háromszög a T_1GT_3 háromszög elfordított képe $60°$-kal, ennélfogva T azonos T_2-vel. Így pedig

$$GT = GT_2 = GH + HT_2 = GT_3 + GT_1.$$

Ezt akartuk bizonyítani és ez ekvivalens a feladat állításával.

Megjegyzés. Goniometriai bizonyítás (1)-re: legyen $GO = 1$, $GOT_1\sphericalangle = t$, ekkor $GOT_3\sphericalangle = 60° - t$ és $GOT_2\sphericalangle = 60° + t$, és ezekkel

$$GT_1 + GT_3 = \sin t + \sin(60° - t) = 2\sin 30° \cos\frac{60° - 2t}{2} =$$
$$= \cos(30° - t) = \sin(60° + t) = GT_2.$$

Lényegében ez a számítás is szerepel a 3 fázisú váltakozóáram elméleti alapjai között.

II. megoldás. Állítsunk merőlegest mindegyik csúcsban az onnan induló átlóra és legyen az A-ban AD-re állított merőleges a, s í.t. Ekkor a, c és e, valamint b, d és f egy-egy háromszöget határoznak meg, és a merőleges szárú szögek alapján mindkét háromszög szabályos. Továbbá, mivel az átlók a kör húrjai, ezért az a és d, ... párok egy-egy átmérőre és egyszersmind O-ra szimmetrikusan helyezkednek el, tehát a két háromszög O-ra középpontosan szimmetrikus helyzetű, emiatt egybevágó is.

Így a bizonyítandó egyenlőség két oldalán a G pontnak a két háromszög oldalaitól való távolságainak összege áll. Ismeretes, hogy egy szabályos háromszög belsejében (vagy kerületén) bárhol veszünk is fel egy pontot, annak távolságai a három oldaltól állandó összeget adnak, ti. a magasságot. És mivel a két szabályos háromszögünk egybevágó, függetlenül attól, hogy G hogyan helyezkedik el belsejükben, a két összeg egyenlő.

Megjegyzés. A feladat kiindulása folytán a G pont az ACE és BDF háromszögekre nézve (külön-külön) az ún. *izogonális pont*, amelyre nézve a 3 csúcstól mért távolságok összege minimális.