A címben feltett kérdésre válaszolva alkalmas előkészületek után két módszert is megadunk. Ezek egyike *véges geometriai,* s e cikk nem titkolt célja az, hogy megismertesse az olvasót a véges geometriák néhány alapvető fogalmával.

1. Számolás egyszerűen, avagy mik azok a véges testek?

Ha egész számokkal összeadást, kivonást vagy szorzást végzünk és nem vagyunk kíváncsiak a pontos eredményre, hanem csak azt szeretnénk tudni, hogy az páros vagy páratlan, akkor ezt egyszerűen megtehetjük. Ha az elvégzendő műveletekben a páros számokat 0-val, a páratlanokat pedig 1-gyel helyettesítjük, majd kiszámoljuk az eredményt, akkor annak paritása meg fog egyezni az eredeti művelet eredményének paritásával, mert páros számot bármilyen másikkal szorozva az eredmény páros szám (0-szor bármi 0), különböző paritású számok összege és különbsége páratlan ($\pm1\pm0=\pm1$), megegyező paritású számok összege és különbsége pedig páros ($1\pm1=0$ vagy 2, $0\pm0=0$). Módszerünk akkor is működik, ha 2 helyett tetszőleges p prímszámra alkalmazzuk, azaz ha a pontos eredmény helyett csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy az p-vel osztva mennyi maradékot ad. Ha így szeretnénk számolni, akkor az összes egész szám helyett elegendő a $0,1,\dots,p-1$ számokkal dolgoznunk, mert minden a egész helyett írhatjuk azt a számot, amit a p-vel való osztásakor kapunk maradékul. Ennek a számolásnak egyéb érdekes tulajdonságai is vannak, ezeket foglaljuk össze a fejezet hátralévő részében. Ha az olvasó ismeri a véges testek fogalmát, akkor a cikk olvasását a 2. fejezetnél folytathatja.

Legyen p egy rögzített prímszám. Az egész számokat soroljuk be osztályokba aszerint, hogy mennyi maradékot adnak a p-vel való osztáskor. Így p darab különböző osztályt kapunk, az azonos osztályban lévő számok felírhatók $np+m$ alakban, ahol n végigfut az egész számok halmazán, m pedig az osztályra jellemző maradék, amelyről feltehetjük, hogy $0\le m\le p-1$. Két egész szám pontosan akkor van egy osztályban, ha különbségük osztható p-vel.

Legyen $\mathbf{Z}_p=\{0,1,\dots,p-1\}$. Ekkor a $\mathbf{Z}_p$ halmaz elemeit természetes módon azonosíthatjuk a fenti osztályokkal. A $\mathbf{Z}_p$ elemei közt definiáljuk az összeadást és a szorzást annak megfelelően, ahogy a p-vel való osztáskor kapott maradékkal való számolásnál tettük: $a\oplus b=c$, illetve $a\odot b=c$, ha az egészek közt elvégezve az összeadást, illetve a szorzást, az eredményül kapott szám abba az osztályba esik, amelyiket c reprezentálja. Először gondoljuk meg, hogy ez a definíció „jó", azaz a műveletek eredménye csak az osztályoktól függ, és nem attól, hogy az egyes osztályoknak melyik elemét tekintjük. Ehhez azt kell belátnunk, hogy ha a és a', valamint b és b' ugyanabba az osztályba tartozik, akkor $a+b$ és $a'+b'$ is, továbbá ab és $a'b'$ is ugyanabba az osztályba tartozik. Ez igaz, mert ha $p\mid a-a'$ és $p\mid b-b'$, akkor $p\mid(a-a')+(b-b')=(a+b)-(a'+b')$ és $p\mid(a-a')b+(b-b')a'=ab-a'b'$.

A kivonást és az osztást az összeadás, illetve a szorzás inverz műveleteként definiáljuk. Először megmutatjuk, hogy $\mathbf{Z}_p$ minden m eleméhez egyértelműen létezik egy olyan $(-m)$-mel jelölt elem, az m *additív inverze,* melyre $m\oplus(-m)=0$. Ez az állítás nyilvánvaló, mert ha tekintjük a $p-m$ kivonás eredményét, akkor a p-nél kisebb nemnegatív egészek közt nyilván csak erre lesz igaz, hogy m-mel összeadva p-vel osztható számot kapunk. Vegyük észre azt is, hogy $-m=(p-1)\odot m$, azaz $-m$ tekinthető m és -1 szorzatának ($\mathbf{Z}_p$-ben -1 az 1 additív inverze). Tehát m-et úgy kell kivonni n-ből, hogy n-hez $-m$-et adunk. Az is könnyen belátható, hogy ha $0\ne m\in\mathbf{Z}_p$, akkor pontosan egy olyan m^{-1}-nel jelölt eleme van $\mathbf{Z}_p$-nek, m *multiplikatív inverze,* amelyre $m\odot m^{-1}=1$. Az m-mel való szorzás ugyanis $\mathbf{Z}_p$ elemeinek egy permutációját adja, mert ha $a\ne b$, akkor $m\odot a\ne m\odot b$, hiszen $m\odot a=m\odot b$ azt jelentené, hogy $p\mid ma-mb=m(a-b)$. Viszont p prím (először használjuk ki ezt a tényt), ezért ebből $p\mid m$ vagy $p\mid a-b$ következik, ami ellentmondás, mert $0<m<p$ és $0<|a-b|<p$. Ha viszont az m-mel való szorzás $\mathbf{Z}_p$ elemeinek egy permutációját adja, akkor pontosan egy olyan elem van $\mathbf{Z}_p$-ben, amelyet m-mel szorozva 1-et kapunk. Az m-mel való osztást definiáljuk tehát $m\ne0$ esetén m^{-1}-nel való szorzásként, a 0-val való osztást pedig ne engedjük meg. Mivel $m\odot0=0$ és az m-mel való szorzás permutálja az elemeket, azért ha $m_1\odot m_2=0$, akkor m_1 és m_2 közül legalább az egyik 0. Ezt a tényt röviden úgy mondjuk, hogy a szorzás *nullosztómentes.* Az $n\odot m^{-1}$ szorzatot a továbbiakban (a valós számoknál megszokott módon) n/m-mel fogjuk jelölni.

Azok a műveleti tulajdonságok, melyeket a valós számok köréből ismerünk, érvényesek a $\mathbf{Z}_p$ halmaz elemein most bevezetett $\oplus$ és $\odot$ műveletekre is. Összefoglalva ezeket kapjuk, hogy (a, b, c tetszőleges $\mathbf{Z}_p$-beli elemeket jelöl):

– a műveletek *asszociatívak,* azaz

$$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)\qquad\text{és}\qquad(a\odot b)\odot c=a\odot(b\odot c);$$

– a műveletek *kommutatívak,* azaz

$$a\oplus b=b\oplus a\qquad\text{és}\qquad a\odot b=b\odot a;$$

– a műveleteknek van *egységelemük,* a 0, illetve az 1, amelyekre teljesül, hogy

$$a\oplus0=0\oplus a=a\qquad\text{és}\qquad a\odot1=1\odot a=a.$$

[1] A cikk elkészítését a Nemzeti Kutatási és Technológiai Hivatal (NKTH) támogatta az Öveges József program keretében. A támogatás forrása a Kutatási és Technológiai Innovációs Alap.

Minden elemnek egyértelműen létezik additív inverze, a 0-tól különböző elemeknek pedig egyértelműen létezik multiplikatív inverzük, azaz olyan $-a$, illetve a^{-1} elemek, melyekre

$$a \oplus (-a) = 0 \qquad \text{és} \qquad a \odot a^{-1} = 1.$$

Az összeadás a szorzásra nézve *disztributív,* azaz

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Ezeket a tulajdonságokat összefoglaló néven úgy mondjuk, hogy $\mathbf{Z}_p$ a $\oplus$ és $\odot$ műveletekre nézve *véges test.* Megmutatható, hogy ha valamely $\mathbf{F}$ véges halmazon tudunk definiálni két darab kétváltozós műveletet úgy, hogy azok kielégítik a fenti tulajdonságokat, akkor $\mathbf{F}$ elemszáma *prímhatvány.* Ami ennek az állításnak a megfordítását illeti, ha $\mathbf{F}$ elemszáma prímszám, akkor a műveletek „lényegében" csak az általunk definiált $\oplus$ és $\odot$ lehetnek. Ha $\mathbf{F}$ elemszáma valamely prímszám 1-nél nagyobb kitevőjű hatványa, akkor is létezik a megfelelő elemszámú test, ennek előállítása azonban már bonyolultabb. Az érdeklődő olvasó ennek a [2], [3] vagy az [5] könyvekben nézhet utána. Példaként megadjuk a 4 elemű és a 9 elemű testek műveleti tábláit. A testek elemeit az egyszerűség kedvéért számokkal jelöltük, ezek a számok azonban már nem azonosíthatók a maradékos osztásnál fellépő osztályokkal. A táblázatok i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében az $i \oplus j$, illetve $i \odot j$ értéke áll (pl. a 9 elemű testben $4 \odot 6 = 2$). Látható, hogy a műveletek nem egyeznek meg a 4-gyel, illetve 9-cel való maradékos összeadással és szorzással. A szorzás esetén ezt nem is várhatjuk el, hiszen pl. két páros szám szorzata osztható 4-gyel, de $2 \odot 2 \neq 0$ kell hogy teljesüljön, mert a szorzás véges testben nullosztómentes.

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	6	1	2	0	4	5	3
8	8	6	7	2	0	1	5	3	4

$\odot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	0	3	6	7	1	4	5	8	2
4	0	4	8	1	5	6	2	3	7
5	0	5	7	4	6	2	8	1	3
6	0	6	3	5	2	8	7	4	1
7	0	7	5	8	3	1	4	2	6
8	0	8	4	2	7	3	1	6	5

A véges testek elemeivel tehát lényegében ugyanúgy számolhatunk, mint a valós számokkal. A továbbiakban az $\oplus$ és $\odot$ jelölések helyett a szokásos összeadás és szorzás jelét fogjuk használni. A műveletek sorrendje is ugyanaz, mint a valós számok esetén, azaz hatványozás, szorzás–osztás, összeadás–kivonás.

2. Véges affin síkok

Sok geometriai kérdésre ad egyszerű megoldási módot a koordinátageometria. Ilyenkor a valós számok műveleti tulajdonságait felhasználva bizonyítunk geometriai állításokat. Mivel a véges testek rendelkeznek a legfontosabb klasszikus műveleti tulajdonságokkal, azért természetesnek tűnik az a kérdés, hogy lehet-e véges testek és a klasszikus koordinátageometria keresztezésével valami geometria-szerűséget előállítani. A válasz igen, így készíthetjük el a véges affin síkokat.

Legyen $\mathbf{F}_q$ valamely rögzített q elemű véges test. A *q-adrendű affin sík,* amit a szokásos módon $AG(2,q)$-val jelölünk, a következő:

Nevezzük *pontoknak* az összes olyan rendezett (a,b) párt, ahol $a,b \in \mathbf{F}_q$ (a klasszikus esetben a sík pontjai a valós számokból készített rendezett pároknak felelnek meg). Az *egyenesek* kétfélék: egyrészt az $[m,k]$ típusú rendezett párok, ahol $m,k \in \mathbf{F}_q$, másrészt a $[c]$ típusú elemek, ahol $c \in \mathbf{F}_q$. (A klasszikus esetben a sík nem függőleges egyenesei egyértelműen megadhatók m meredekségükkel és azzal a $(0,k)$ ponttal, ahol az Y tengelyt metszik, míg a függőleges egyenesek egyértelműen leírhatók azzal a $(c,0)$ ponttal, ahol az X tengelyt metszik). A véges síkon definiálnunk kell az *illeszkedést* is, azaz meg kell mondanunk, hogy egy pont mikor van rajta egy egyenesen. Az (a,b) pont akkor és csak akkor legyen rajta az $[m,k]$ egyenesen, ha teljesül, hogy $b = ma + k$, a $[c]$ egyenesen pedig pontosan akkor, ha $a = c$. A klasszikus esethez hasonlóan azt mondjuk, hogy az $[m,k]$ egyenes egyenlete $Y = mX + k$, illetve a $[c]$ egyenes egyenlete $X = c$. Az illeszkedés helyett gyakran fogjuk használni a geometriában megszokott fogalmakat, pl. beszélünk két pont összekötő egyeneséről: ezen olyan egyenest értünk, amely mindkét pontra illeszkedik.

1. állítás. *Az $AG(2,q)$ síkon q^2 darab pont és q^2+q darab egyenes van. Bármely két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese.*

Bizonyítás. A pontok száma megegyezik az $\mathbf{F}_q$ elemeiből képezhető rendezett párok számával, ami q^2, mert $\mathbf{F}_q$-nak q eleme van. Ugyanezért az $[m,k]$ típusú egyenesek száma is q^2. Az összes egyenes száma ennél q-val több, mert $[c]$ típusú egyenesből pontosan annyi van, ahány eleme van $\mathbf{F}_q$-nak.

Legyen (a_1,b_1) és (a_2,b_2) két különböző pont. Ha $a_1=a_2$, akkor a $[c]$ típusú egyenesek közül az $X=a_1$ egyenletű mindkét pontra illeszkedik. Más $[c]$ típusú egyenes nyilván nem illeszkedik a pontokra, és $[m,k]$ típusú sem, mert ha az $Y=mX+k$ mindkét ponton átmenne, akkor $b_1=ma_1+k=ma_2+k=b_2$, azaz a két pont nem lenne különböző. Ha $a_1\neq a_2$, akkor $[c]$ típusú egyenes nyilván nem kötheti össze a pontokat. Ha valamely $Y=mX+k$ egyenletű egyenes mindkét ponton átmegy, az azt jelenti, hogy

$$b_1=ma_1+k \qquad \text{és} \qquad b_2=ma_2+k.$$

Ezekből következik, hogy $-b_2=-(ma_2+k)=-ma_2-k$, s ezért

$$b_1-b_2=ma_1+k-ma_2-k=ma_1-ma_2+k-k=ma_1-ma_2=m(a_1-a_2).$$

Mivel $a_1\neq a_2$, azért létezik $(a_1-a_2)^{-1}$, így kapjuk, hogy

$$m=\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2} \qquad \text{és} \qquad k=b_1-a_1\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}=\frac{b_2a_1-a_2b_1}{a_1-a_2}\,.$$

Tehát csak az az $[m,k]$ típusú egyenes mehet át mindkét ponton, melynek egyenlete

$$Y=\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}X+\frac{b_2a_1-a_2b_1}{a_1-a_2}\,. \tag{1}$$

Egyszerű számolással adódik, hogy ezt az egyenletet mindkét pont koordinátái ki is elégítik. □

A bizonyítás végén kiszámolt egyenlet formálisan megegyezik a klasszikus esetben kapott egyenlettel, hiszen a valós síkon az (a_1,b_1) és az (a_2,b_2) koordinátájú pontok összekötő egyenesének egyenlete $a_1\neq a_2$ esetén éppen (1).

2. állítás. *Az $AG(2,q)$ sík minden egyenesén q pont van és minden ponton $q+1$ egyenes megy át.*

Bizonyítás. Az (a,b) pont pontosan akkor van rajta az $X=c$ egyenletű egyenesen, ha $a=c$. Mivel ekkor b tetszőleges, azért q különböző értéket vehet fel, tehát az egyenesen q pont van. Az $Y=mX+k$ egyenletű egyenesen pedig akkor van rajta a pont, ha $b=ma+k$. Azaz a tetszőlegesen választható, ez q lehetőség, a választása viszont már meghatározza b-t. Tehát az ilyen típusú egyeneseken is q pont van.

Legyen most P egy tetszőleges pont, a rajta átmenő egyenesek száma pedig t. Ezen egyenesek mindegyike $q-1$ darab P-től különböző pontot tartalmaz. E pontok egymástól is különböznek, mert az 1. állítás szerint két különböző ponton át pontosan egy egyenes megy. Tehát a síkon összesen $1+t(q-1)$ pont van. Viszont szintén az 1. állításból következik, hogy ez a szám q^2. Tehát

$$1+t(q-1)=q^2,$$

amiből kapjuk, hogy $t=q+1$. □

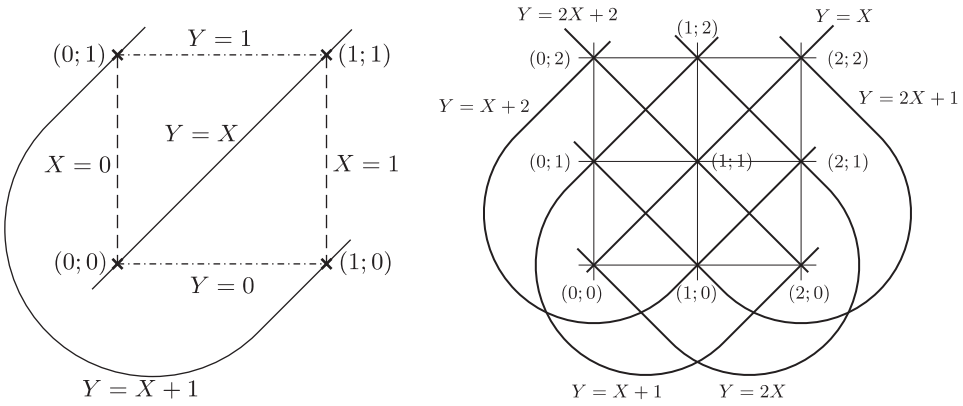
Nevezzük az e és f egyeneseket *párhuzamosaknak,* ha nincs közös pontjuk, vagy ha egybeesnek. Ez megfelel a párhuzamosság klasszikus definíciójának. A következő állítás is hasonlít az euklidészi geometria megfelelő tételére:

3. állítás. *Ha az $AG(2,q)$ sík P pontja nincs rajta a sík e egyenesén, akkor P-n át pontosan egy e-vel párhuzamos egyenes megy. A sík egyenesei párhuzamossági osztályokba sorolhatók úgy, hogy két egyenes pontosan akkor van egy osztályban, ha párhuzamosak. Minden osztályban q darab egyenes van, a sík minden pontján át minden osztályból pontosan egy egyenes megy.*

Bizonyítás. A 2. állítás szerint P-n át $q+1$ egyenes megy. Az e egyenesen q különböző pont van, ezeket P-vel összekötve összesen q darab e-t metsző és P-n átmenő egyenest kapunk. Vagyis P-n át $(q+1)-q=1$ darab e-t nem metsző egyenes megy.

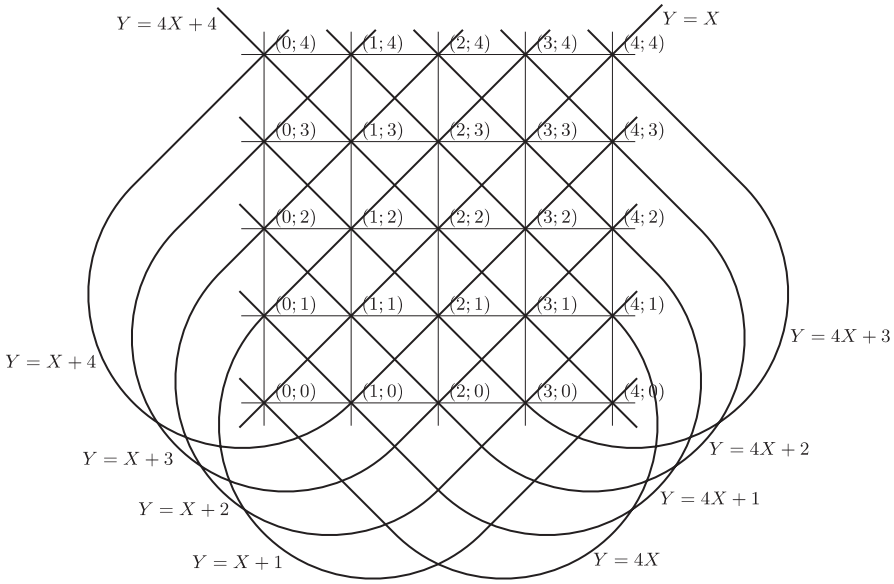
Legyen most e és f két tetszőleges, de különböző egyenes, amelyek az M pontban metszik egymást. Az f egyenesen $q-1$ darab M-től különböző pont van, legyenek ezek $F_1,F_2,\ldots,F_{q-1}$. Az előzőek szerint minden F_i ponthoz pontosan egy olyan e_i egyenes van, amelyik átmegy rajta és párhuzamos e-vel. Az e_i egyenesek egymással is párhuzamosak, mert ha $i\neq j$ esetén az N pont e_i-n is és e_j-n is rajta lenne, akkor N-en át két e-vel párhuzamos egyenes is menne, hiszen e_i is és e_j is ilyen. Ez viszont ellentmond állításunk már bizonyított első részének. Tehát e osztályában, s mivel e tetszőleges volt, így minden párhuzamossági osztályban q darab egyenes van. Mivel minden egyenesre q pont illeszkedik, azért az is igaz, hogy a sík minden pontján át minden osztályból pontosan egy egyenes megy. □

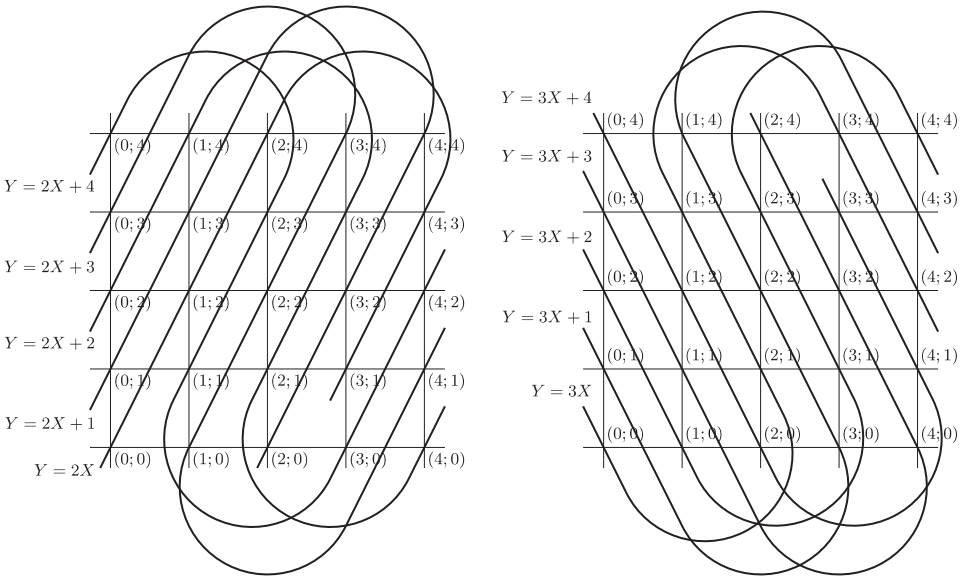
A legegyszerűbb esetekben, amikor q kicsi, könnyen „lerajzolhatjuk" az $AG(2,q)$ síkot. A klasszikus síkkal való analógia akkor látszik a legjobban, ha a pontokat a szokásos derékszögű koordinátarendszer azon rácspontjainak választjuk, melyeknek mindkét koordinátája a $\{0,1,\ldots,q-1\}$ halmazból való. Ekkor persze a véges sík egyenesei az euklidészi síkon már nem lesznek egyenesek, de hasonlítanak azokra, és a párhuzamosság is jól szemléltethető. A $q=2$, $q=3$ esetek egyszerűek, ezek láthatók az *1. ábrán.*



1. ábra

Ha $q = 5$, akkor érdemesebb az egyes párhuzamossági osztályokat külön-külön lerajzolni, egyébként az ábra már áttekinthetetlenné válna. Ez látható a *2. ábrán.*





2. ábra

A valós síkon nemcsak az egyenesek, hanem különféle görbék is megadhatók az egyenletükkel. Azok az egyenletek, melyekben X-nek és Y-nak csak elsőfokú kifejezése szerepel, azaz az $AX+BY+C = 0$ (A és B egyszerre nem 0) típusú

egyenletek mindig egyenesek egyenletei. A legegyszerűbb nem ilyen egyenlet az $Y = X^2$. Ez a valós síkon parabolát határoz meg. Vizsgáljuk meg, hogy mit mondhatunk erről az egyenletről, azaz az általa meghatározott ponthalmazról véges affin síkokon.

A fejezet hátralévő részében szereplő tételek minden olyan $AG(2,q)$ síkon igazak, ahol q páratlan prímhatvány, a bizonyítások azonban egyszerűbbek, ha prímhatványok helyett csak prímeket tekintünk. Az érdeklődő olvasó a prímhatvány esetre vonatkozó bizonyításokat megtalálja pl. a [3] vagy [4] könyvekben.

Legyen tehát p páratlan prím. Ekkor a p elemű testet azonosíthatjuk $\mathbf{Z}_p$-vel. Tekintsük az $AG(2,p)$ síkon az $Y = X^2$ egyenletnek eleget tevő pontokat. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban ezt a ponthalmazt *p-edrendű parabolának* nevezzük, ha pedig egy pont benne van a halmazban, akkor azt mondjuk, hogy a pont rajta van a parabolán.

4. állítás. *A p-edrendű parabolának p pontja van, ezek közül a sík bármely egyenese legfeljebb kettőt tartalmaz.*

Bizonyítás. A sík (a,b) pontja akkor és csak akkor van rajta a p-edrendű parabolán, ha $b = a^2$. A pont első koordinátája tehát meghatározza a másodikat. Mivel a tetszőleges, azért a parabolán lévő pontok száma megegyezik a véges test elemeinek számával, tehát p.

Vizsgáljuk most meg egy egyenes és a parabola közös pontjait. Ha az egyenes $[c]$ típusú, akkor a közös pontok száma 1, mert a közös pontok koordinátái kielégítik az $X = c$ és az $Y = X^2$ egyenleteket is, s e két egyenletnek csak a (c,c^2) pont tesz eleget (a klasszikus síkon is ugyanígy látjuk be, hogy egy függőleges egyenesnek pontosan egy pontja van a parabolán). Ha az egyenes $[m,k]$ típusú, akkor a közös pontok koordinátáira $Y = mX + k$ és $Y = X^2$ is teljesül, vagyis $X^2 = mX + k$ is igaz. Próbáljuk megoldani ezt a másodfokú egyenletet. A valós esetből ismert megoldóképletet nem tudjuk alkalmazni, hiszen abban négyzetgyökvonás szerepel, amit véges test elemein egyelőre nem értelmeztünk. Megpróbálhatjuk viszont követni azt az utat, ahogy bebizonyítottuk a megoldóképletet. Vigyük az ismeretlent tartalmazó tagokat az egyenlet bal oldalára és egészítsük ki az ott szereplő kifejezést teljes négyzetté (az $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ azonosság véges testekben is igaz, ha a 2-vel jelölt elem az $1+1$ összeadás eredménye). Mivel p páratlan, azért $1+1 = 2 \neq 0$ és $2 \cdot 2 = 4 \neq 0$ (ha $p = 3$, akkor – mint láttuk – 4 helyett 1-et kell írnunk), ezért ezekkel az elemekkel oszthatunk. Egyenletünk tehát

$$X^2 - mX + \frac{m^2}{4} = k + \frac{m^2}{4},$$

azaz

$$\left(X - \frac{m}{2}\right)^2 = k + \frac{m^2}{4} \tag{2}$$

alakra hozható.

Most kellene négyzetgyököt vonni. Ehhez némi előkészületre van szükségünk. Ha $\mathbf{Z}_p$ elemeit négyzetre emeljük, akkor $(p+1)/2$ különböző elemet kapunk. A szorzás asszociativitása és kommutativitása miatt ugyanis $(-a)^2 = (-1)^2 a^2 = a^2$, tehát a 0-tól különböző elemek párokba állíthatók úgy, hogy az egyes párokban lévő elemek négyzete megegyezik. Különböző párokhoz tartozó elemek négyzete viszont különböző, mert ha $a^2 = b^2$, akkor $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 0$, vagyis a nullosztómentesség miatt vagy $a = b$ vagy $a = -b$. A párok száma $(p-1)/2$, ehhez kell még a 0-t hozzáadni, s így kapunk $(p+1)/2$ különböző elemet. Tehát pontosan egy olyan elem van, amelynek a négyzete 0, a nemnulla elemek fele nem áll elő $\mathbf{Z}_p$-beli elem négyzeteként – ezeket a továbbiakban *nemnégyzet elemeknek* nevezzük –, másik fele viszont pontosan két $\mathbf{Z}_p$-beli elem négyzete, ezeket a továbbiakban *négyzetelemeknek* nevezzük. (A valós számok esetén a nemnégyzetek a negatív, a négyzetek pedig a pozitív számok).

A (2) egyenletnek tehát nincs megoldása, ha a bal oldalon nemnégyzet elem áll, 1 megoldása van, ha a bal oldalon 0 van, és két megoldása van, ha a bal oldalon négyzetelem áll. A p-edrendű parabolának és az $Y = mX + k$ egyenesnek ezért nincs közös pontja, ha $k + m^2/4$ nemnégyzet. Ha $k + m^2/4 = 0$, akkor egyetlen közös pontjuk van, ez az $(m/2, m^2/4)$, ha pedig $k + m^2/4$ négyzetelem, akkor a közös pontok száma kettő, ezek $(m/2 + d, m^2/4 + md + d^2)$ és $(m/2 - d, m^2/4 - md + d^2)$, ahol $d^2 = k + m^2/4$. □

A valós síkon a parabolának minden P pontjában van érintőegyenese. Ez az a nem függőleges egyenes, amelyiknek a parabolával csak egy közös pontja van, P. Különböző pontokhoz tartozó érintők nem párhuzamosak, a függőleges irányt kivéve minden irányú érintője van a parabolának. Ezek a p-edrendű parabolára is igazak.

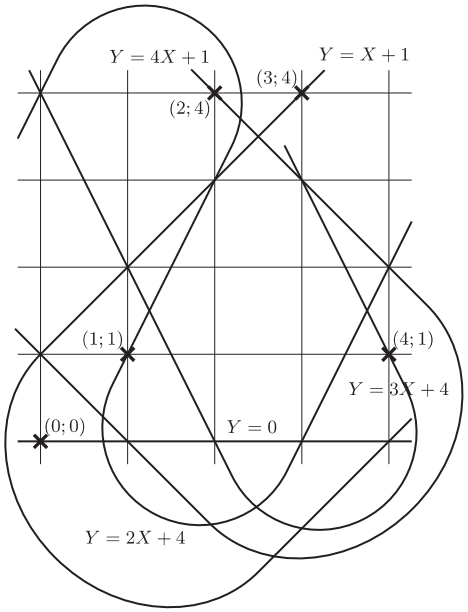
5. állítás. *A p-edrendű parabola tetszőleges T pontján át $p-1$ olyan egyenes megy, amelyik két pontban metszi a parabolát és két olyan, amelyik csak T-ben. A $[c]$ típusú egyenesek mindegyike egy pontban metszi a parabolát, a többi párhuzamossági osztály mindegyikében pontosan egy olyan egyenes van, amelyik egy pontot tartalmaz a paraboláról.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy T-n át $p+1$ egyenes megy. A parabolának $p-1$ T-től különböző pontja van, ezeket T-vel összekötve csupa különböző egyenest kapunk, mert a 4. állítás szerint egyetlen egyenes sem metszheti kettőnél több pontban a parabolát. Tehát T-n át $p-1$ darab két pontban metsző egyenes megy, a maradék $(p+1)-(p-1) = 2$ egyenes pedig csak T-ben metszi a parabolát.

Azt már beláttuk, hogy a $[c]$ típusú egyenesek mindegyike egy pontban metszi a parabolát. A 4. állítás bizonyítása során azt is kiszámoltuk, hogy az $Y = mX + k$ egyenesnek pontosan akkor van egy közös pontja a parabolával, ha

$k + m^2/4 = 0$. Ha tehát m-et rögzítjük, azaz egy párhuzamossági osztály egyeneseit tekintjük, akkor pontosan egy egyenesnek, az $Y = mX - m^2/4$ egyenletűnek lesz egy közös pontja a parabolával. (Ez a pont $(m/2, m^2/4)$.) □

A továbbiakban *a p-edrendű parabola érintőjének* nevezzük azokat az $[m, k]$ típusú egyeneseket, melyeknek egy közös pontjuk van a parabolával. Az (a, a^2) pontban tehát a parabola érintőjének egyenlete $Y = 2aX - a^2$, ami formálisan ugyanaz, mint a valós sík esetén. A *3. ábrán* $p = 5$ esetén látható a parabola és az egyes párhuzamossági osztályokhoz tartozó érintői.



3. ábra

Ebben az esetben a négyzetelemek 1, 4; a nemnégyzetek 2, 3. A parabola pontjai $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ és $(4, 1)$, az egyes pontokban az érintők egyenlete pedig rendre $Y = 0$, $Y = 2X + 4$, $Y = 4X + 1$, $Y = X + 1$ és $Y = 3X + 4$.

3. A focibajnokság szervezése

Most már mindent tudunk ahhoz, hogy nekilássunk a focibajnokság megszervezéséhez. Körmérkőzéses bajnokságban minden csapat minden másikkal pontosan egyszer találkozik. A bajnokságot fordulókra osztják, minden fordulóban minden csapat egy meccset játszik. Ez azt jelenti, hogy a csapatok száma páros. (Páratlan számú csapat esetén minden fordulóban egy csapat pihen, ezért ha benevezünk egy virtuális csapatot, amelyiknek a neve PIHEN FC, akkor a bajnokság megszervezését visszavezettük a páros sok résztvevő esetére.) Ha a csapatok száma kicsi, akkor könnyű dolgunk van. Két csapat esetén csak egy meccs van. Ha négy csapatunk van, A, B, C és D, akkor lényegében egyféleképp szervezhető a bajnokság, mert minden fordulót egyértelműen meghatároz az, hogy A kivel játszik:
1. forduló: *A–B* *C–D*
2. forduló: *A–C* *B–D*
3. forduló: *A–D* *B–C*

Ha még két csapat, E és F is benevez, akkor már kicsit bonyolultabb a helyzet. Ha például úgy kezdődne a bajnokság, hogy
1. forduló: *A–B* *C–D* *E–F*
2. forduló: *A–C* *B–E* *D–F*
3. forduló: *A–F* *B–D* *C–E*

akkor abban a fordulóban, amelyikben az *A–D* meccsre sor kerülne, E nem tudna kivel játszani, mert B-vel, C-vel és F-fel már találkozott. Rövid próbálkozás után persze itt is találunk megoldást, pl:
1. forduló: *A–B* *C–D* *E–F*
2. forduló: *A–C* *B–E* *D–F*
3. forduló: *A–D* *B–F* *C–E*
4. forduló: *A–E* *B–D* *C–F*
5. forduló: *A–F* *B–C* *D–E*

Meg lehet mutatni (lásd pl. [1]), hogy hat lényegében különböző bajnokság szervezhető. A legtöbb bajnokságban azonban hatnál jóval több csapat szerepel. Az európai elsőosztályú focibajnokságok közül sokban 20 (pl. olasz, spanyol)

vagy 18 (német, francia) csapat szerepel. Ezekben a számokban az a közös, hogy felírhatók $p+1$ alakban, ahol p páratlan prím. Ilyen létszám mellett könnyen megszervezhető a bajnokság a p-edrendű parabola tulajdonságait felhasználva.

Bajnokság $p+1$ csapattal. Tekintsük az $AG(2,p)$ síkon a p-edrendű parabolát. Legyenek ennek pontjai $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$, ahol az indexeket úgy választjuk, hogy a parabola A_i-beli érintője párhuzamos legyen a sík $Y = iX$ egyenletű egyenesével minden $i \in \mathbf{Z}_p$ esetén.

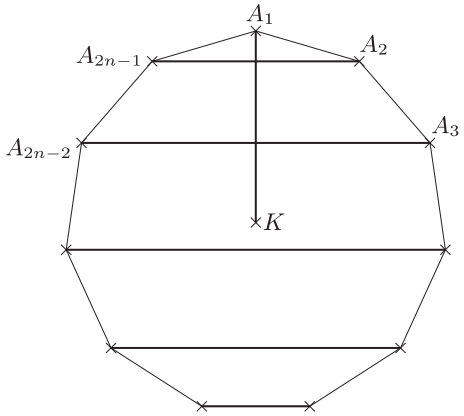
A bajnokságban szereplő csapatok közül p darabot feleltessünk meg a parabola pontjainak, egy csapatot pedig egy (∞) jelnek. A fordulókat feleltessük meg a sík párhuzamos egyenesei által alkotott osztályoknak úgy, hogy a $[c]$ típusú egyenesek osztálya nem felel meg fordulónak. A többi párhuzamossági osztály mindegyike egyértelműen jellemezhető azzal az $m \in \mathbf{Z}_p$ értékkel, amelyik az adott osztályba tartozó egyenesek egyenletében X együtthatója. Tehát beszélhetünk az m meredekséghez tartozó fordulóról. Ebben az $\mathcal{F}_m$-mel jelölt fordulóban a csapatok párosítása legyen a következő:

A_m–(∞) és A_i–A_j pontosan akkor, ha az A_iA_j egyenes egyenlete $Y = mX + k$ alakú.

Megmutatjuk, hogy így egy jó lebonyolítást kapunk. A fordulók száma eggyel kisebb, mint a csapatok száma. Minden $m \in \mathbf{Z}_p$ esetén igaz, hogy az $\mathcal{F}_m$ fordulóban minden csapat pontosan egy meccset játszik, mert a parabola tetszőleges A_i pontján át az 5. állítás szerint pontosan egy m meredekségű egyenes megy. Ha ez az érintő, akkor $i = m$ és A_i ellenfele (∞) ha pedig $i \neq m$, akkor az A_i-n átmenő m meredekségű egyenes a 4. állítás szerint a parabolának még pontosan egy $A_j \neq A_i$ pontját tartalmazza, s az ennek megfelelő csapattal játszik A_i az $\mathcal{F}_m$ fordulóban. Az is látszik, hogy bármely két csapat pontosan egyszer találkozik a bajnokság során. Ez (∞) esetén az 5. állításnak abból a részéből következik, amely szerint a $[c]$ típusú egyenesek osztályát kivéve a parabolának minden párhuzamossági osztályban pontosan egy érintője van; A_i és A_j esetén pedig az 5. állítás azon részéből, mely szerint a $[c]$ típusú egyenesek egy pontban metszik a parabolát, azaz az A_iA_j egyenes nem ilyen, tehát egyenlete $Y = mX + k$ alakú, s ezért a meccsre az $\mathcal{F}_m$ fordulóban sor kerül.

Az $AG(2,q)$ sík parabolájából kiindulva ugyanezzel a módszerrel lehet megszervezni a bajnokságot pl. Máltán, ahol $10 = 3^2 + 1$ csapat van az első osztályban. A magyar NB I-ben viszont 16 csapat szerepel, ezért ott módszerünk nem működik. Az ilyen „nem jó" bajnokságokat is meg lehet persze szervezni. Erre a legegyszerűbb módszer a következő ($n > 1$ tetszőleges egész szám):

Bajnokság $2n$ csapattal. Tekintsünk az euklidészi síkon egy szabályos $(2n-1)$-szöget. Legyenek ennek csúcspontjai $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$. A bajnokságban szereplő csapatok közül $2n-1$ darabot feleltessünk meg a sokszög csúcspontjainak, egy csapatot pedig a sokszög köré írható kör K középpontjának. A fordulókat feleltessük meg a KA_m irányoknak, ahol $m = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Ekkor beszélhetünk az m indexhez tartozó fordulóról. Ebben az $\mathcal{F}_m$-mel jelölt fordulóban a csapatok párosítása legyen a következő (lásd a *4. ábrát*).



4. ábra

A_m–K és A_i–A_j pontosan akkor, ha az A_iA_j egyenes merőleges az A_mK egyenesre.

Megmutatjuk, hogy így egy jó lebonyolítást kapunk. A fordulók száma eggyel kisebb, mint a csapatok száma. Minden $m = 1, 2, \ldots, 2n-1$ esetén igaz, hogy az $\mathcal{F}_m$ fordulóban minden csapat pontosan egy meccset játszik, mert A_m ellenfele K, ha pedig $i \neq m$, akkor az A_i pont A_mK egyenesre vonatkozó tükörképe a sokszög egy $A_j \neq A_i$ csúcsa (itt használjuk ki, hogy a sokszögnek páratlan sok csúcsa van), s az ennek megfelelő csapattal játszik A_i. Az is látszik, hogy bármely két csapat pontosan egyszer találkozik a bajnokság során. Ez K esetén nyilvánvaló, A_i és A_j esetén pedig abból következik, hogy az A_iA_j szakasz felezőmerőlegese átmegy K-n és a sokszögnek pontosan egy A_m csúcsát tartalmazza, a meccsre az ennek megfelelő $\mathcal{F}_m$ fordulóban kerül sor.

A kétféle bajnokságszervezés leírása alig tér el egymástól. Ez nem véletlen, azért van így, mert a véges síkok parabolái és az euklidészi sík körei sok szempontból ugyanolyan görbék. Az azonban, hogy mit értünk ezen, már egy következő cikk témája.

Irodalom

[1] Bérczi Gergely, Gács András, Hraskó András és Szőnyi Tamás: *Reguláris gráfok,* Új matematikai mozaik (szerk. Hraskó András), Typotex Kiadó, Budapest, 2002, 77–104.

[2] Freud Róbert: *Lineáris algebra,* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1998.

[3] Kárteszi Ferenc: *Bevezetés a véges geometriákba,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[4] Kiss György és Szőnyi Tamás: *Véges geometriák,* Polygon Kiadó, Szeged, 2001.

[5] Montágh Balázs: *Salakmotor versenyek és véges síkok,* Új matematikai mozaik (szerk. Hraskó András), Typotex Kiadó, Budapest, 2002, 7–52.

[6] Wallis, W. D.: *One-Factorizations,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.