

I. rész

1. Az $a = \overline{374x25y}$ tízes számrendszerbeli számban az x és y számjegyek véletlenszerű megválasztásánál mi a valószínűsége annak, hogy a szám osztható 15-tel?

Megoldás. Az x és az y egymástól függetlenül 10-féleképpen választható meg, ezért 100 darab adott alakú szám van. 15-tel csak azok a számok oszthatók, amelyek 3-mal és 5-tel is oszthatók. Az a szám csak akkor osztható 5-tel, ha az y értéke 0 vagy 5.

Ha $y = 0$, akkor a számjegyek összege $3 + 7 + 4 + x + 2 + 5 + 0 = 21 + x$, ezért az x lehetséges értékei 0, 3, 6 vagy 9. Így 4 darab olyan számot kapunk, amely 0-ra végződik és osztható 15-tel.

Ha $y = 5$, akkor a számjegyek összege $3 + 7 + 4 + x + 2 + 5 + 5 = 26 + x$, itt az x lehetséges értéke 1, 4 vagy 7 lehet, újabb 3 számot kapunk.

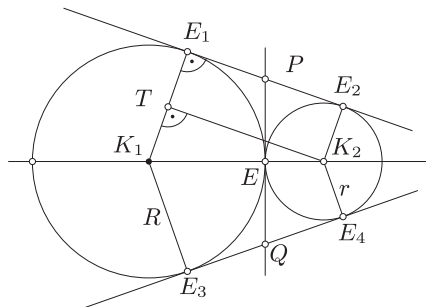
Tehát ha felíránk az x és y összes lehetséges értékével a 100 darab számot, akkor 7 darab lenne közöttük, amely osztható 15-tel. A kérdéses valószínűség így 0,07.

2. Két különböző sugarú kör kívülről érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy a közös belső érintőnek a közös külső érintők közötti szakasza egyenlő a két sugár mértani közepének a kétszeresével.

Megoldás. Mivel körhöz külső pontból egyenlő hosszúságú érintők húzhatók, azért az ábra jelölései alapján

$$PE = PE_1 = PE_2 = QE = QE_3 = QE_4,$$

így $PQ = PE_1 + PE_2 = E_1E_2 = a$.



A K_1K_2T háromszögben $(R - r)^2 + a^2 = (R + r)^2$. Ebből $a^2 = 4Rr$, azaz

$$PQ = a = 2\sqrt{R \cdot r}.$$

3. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik az alábbi egyenletet:

- a) $(x - 3) \cdot (4x - 3y) = 0$;
- b) $17x^2 - 24xy + 9y^2 - 6x + 9 = 0$;
- c) $\frac{4x - 3y}{x - 3} = 0$;
- d) $\frac{x - 3}{4x - 3y} = 0$.

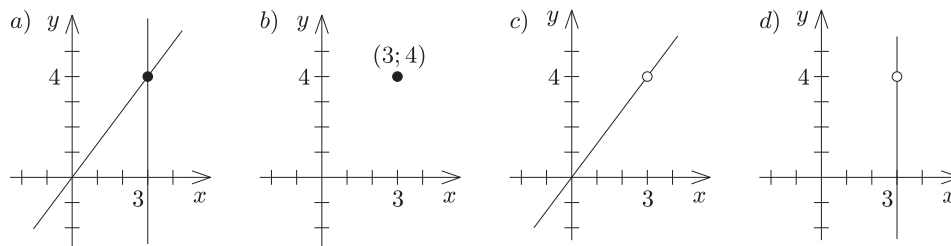
Megoldás. a) $(x - 3) \cdot (4x - 3y) = 0$. Egy szorzat csak akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0, azaz $x - 3 = 0$, vagy $4x - 3y = 0$. Ezekből $x = 3$, és y tetszőleges valós szám, vagy $y = \frac{4}{3}x$.

b)

$$\begin{aligned} b) \quad & 17x^2 - 24xy + 9y^2 - 6x + 9 = 0 \\ & 16x^2 - 24xy + 9y^2 + x^2 - 6x + 9 = 0 \\ & (4x - 3y)^2 + (x - 3)^2 = 0. \end{aligned}$$

Mivel $(4x - 3y)^2 \geq 0$, és $(x - 3)^2 \geq 0$, azért az egyenlőség csak abban az esetben teljesül, ha $x - 3 = 0$ és $4x - 3y = 0$, azaz $x = 3$ és $y = 4$. Ez egyetlen pontra teljesül, ez $P(3; 4)$.

- c) $\frac{4x - 3y}{x - 3} = 0 \Rightarrow 4x - 3y = 0$, de $x - 3 \neq 0$, azaz $y = \frac{4}{3}x$, de $x \neq 3$.
- d) $\frac{x - 3}{4x - 3y} = 0 \Rightarrow x - 3 = 0$, de $4x - 3y \neq 0$, azaz $x = 3$, de $y \neq \frac{4}{3}x$, és így $y \neq 4$.



4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$2^x + 2^{-x} + \frac{1}{2^x + 2^{-x}} \geq -\frac{11}{3\sqrt{2}} \log_{(3-2\sqrt{2})} (3 + 2\sqrt{2}).$$

Megoldás. Az egyenlőtlenség minden valós x -re értelmezve van. A logaritmus alapja és a logaritmus numerusza is pozitív, az alap nem egyenlő 1-gyel, valamint e két érték egymás reciproka, hiszen szorzatuk 1, ezért a $\log_{(3-2\sqrt{2})} (3 + 2\sqrt{2}) = -1$. Ennek felhasználásával az egyenlőtlenség a következőképpen módosul:

$$2^x + 2^{-x} + \frac{1}{2^x + 2^{-x}} \geq \frac{11}{3\sqrt{2}}.$$

Vezessük be a $2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} = a$ jelölést. Ekkor $a \geq 2$.

$$a + \frac{1}{a} \geq \frac{11}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{2}a^2 - 11a + 3\sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ vagy } a \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$a \geq 2$, így csak az $a \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ esetet kell vizsgálni.

$$2^x + \frac{1}{2^x} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 3\sqrt{2} \cdot 2^x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}} \text{ vagy } 2^x \geq \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

A megoldás: $x \leq -\frac{1}{2}$ vagy $x \geq \frac{1}{2}$.

II. rész

5. Három pozitív szám harmonikus közepe $\frac{180}{13}$, a mértani közepük $10\sqrt[3]{3}$, a négyzetes közepük pedig $\sqrt{\frac{725}{3}}$. Mivel egyenlő a számtani közepük?

Megoldás. A feladat feltételei alapján felírhatjuk, hogy

$$(1) \quad \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{180}{13} \Rightarrow \frac{3abc}{ab + ac + bc} = \frac{180}{13},$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{abc} = 10\sqrt[3]{3} \Rightarrow abc = 3000,$$

$$(3) \quad \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} = \sqrt{\frac{725}{3}} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 725.$$

Az $abc = 3000$ értékét helyettesítsük be az (1) egyenletbe:

$$\frac{9000}{ab + ac + bc} = \frac{180}{13} \Rightarrow ab + ac + bc = \frac{9000 \cdot 13}{180} = 650 \Rightarrow 2(ab + ac + bc) = 1300.$$

Ehhez az utóbbi egyenlethez adjuk hozzá a (3) egyenletet:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 2025 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 2025 \Rightarrow a + b + c = \pm 45.$$

Mivel a, b és c pozitív, azért $\frac{a + b + c}{3} = 15$.

6. a) A $4px^2 - (2p^3 - 8p + 2)x + p^2 - 4 = 0$ másodfokú egyenletben határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az ellentétes előjelű valós gyökök közül egyik se legyen nagyobb $\frac{1}{2}$ -nél.

b) Van-e a p paraméternek olyan értéke, amelyre az

$$y = 4px^2 - (2p^3 - 8p + 2)x + p^2 - 4$$

függvény az $x = 2$ -nél veszi fel a maximumát, és ennek értéke -8 ?

Megoldás. a) A másodfokú egyenletben $p \neq 0$. Az egyenlet gyökei a következő alakban írhatók fel:

$$x_{1,2} = \frac{2p^3 - 8p + 2 \pm \sqrt{(2p^3 - 8p + 2)^2 - 16p(p^2 - 4)}}{8p}.$$

Az egyenlet diszkriminánsa

$$\begin{aligned} D &= (2p^3 - 8p + 2)^2 - 16p(p^2 - 4) = 4p^6 + 64p^2 + 4 - 32p^4 + 8p^3 - 32p - 16p^3 + 64p = \\ &= (2p^3 - 8p - 2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

az egyenletnek a p paraméter minden szóba jövő értékére valós gyökei vannak. A gyökök akkor és csak akkor ellenkező előjelűek, ha a szorzatuk negatív: a Viète-formula szerint $x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2 - 4}{4p} < 0$.

I. $p > 0$ és $p^2 - 4 < 0 \Rightarrow 0 < p < 2$. Ekkor x_1 negatív és x_2 pozitív. Így

$$x_1 < x_2 = \frac{1}{2p} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow p \geq 1, \quad \text{tehát} \quad 1 \leq p < 2.$$

II. $p < 0$ és $p^2 - 4 > 0 \Rightarrow p < -2$. Ebben az esetben

$$x_2 < x_1 = \frac{p^2 - 4}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\sqrt{5} \leq p \leq \sqrt{5}, \quad \text{azaz} \quad -\sqrt{5} \leq p < -2.$$

Tehát $-\sqrt{5} \leq p < -2$ vagy $1 \leq p < 2$.

b) Ha $x = 2$, akkor $y = 16p - 4p^3 + 16p - 4 + p^2 - 4 = -8 \Rightarrow 4p^3 - p^2 - 32p = 0$. Ennek gyökei: $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1 + \sqrt{513}}{8}$ és $p_3 = \frac{1 - \sqrt{513}}{8}$. Mivel a másodfokú függvénynek csak negatív főegyüttható mellett lehet maximuma, azért csak $p_3 = \frac{1 - \sqrt{513}}{8}$ jöhet szóba. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ebben az esetben adódó másodfokú polinomnak nem a 2 helyen van a maximuma, így a feladat kérdésére a válasz tagadó.

7. Az $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(-a_1; -a_2)$ és $D(-b_1; -b_2)$ pontokat forgassuk el az origó körül 90° -kal pozitív irányba, majd az így kapott pontokra alkalmazzunk origó középpontú kétszeres nyújtást. A kapott pontok legyenek rendre A_1 , B_1 , C_1 és D_1 . Igazoljuk, hogy az AA_1 , BB_1 , CC_1 és DD_1 szakaszok felezőpontjai paralelogrammát határoznak meg, vagy egy egyenesre esnek.

Megoldás. Határozzuk meg először a forgatva nyújtással kapott pontok koordinátáit:

$$\begin{aligned} A(a_1; a_2) &\Rightarrow A_1(-2a_2; 2a_1), & B(b_1; b_2) &\Rightarrow B_1(-2b_2; 2b_1), \\ C(-a_1; -a_2) &\Rightarrow C_1(2a_2; -2a_1), & D(-b_1; -b_2) &\Rightarrow D_1(2b_2; -2b_1). \end{aligned}$$

A felezési pontok koordinátái:

$$\begin{aligned} AA_1 \text{ szakasz esetén} & \quad F_1 \left(\frac{a_1 - 2a_2}{2}; \frac{a_2 + 2a_1}{2} \right), \\ BB_1 \text{ szakasznál} & \quad F_2 \left(\frac{b_1 - 2b_2}{2}; \frac{b_2 + 2b_1}{2} \right), \\ CC_1 \text{ szakasznál} & \quad F_3 \left(\frac{-a_1 + 2a_2}{2}; \frac{-a_2 - 2a_1}{2} \right), \\ DD_1 \text{ esetén} & \quad F_4 \left(\frac{-b_1 + 2b_2}{2}; \frac{-b_2 - 2b_1}{2} \right). \end{aligned}$$

Az F_3 koordinátái az F_1 megfelelő koordinátáinak ellentettjei, ugyanez teljesül F_4 és F_2 koordinátáira, így F_3 az F_1 -nek, F_4 az F_2 -nek az origóra vonatkozó tükröképe. A négy pont tehát vagy egy egyenesre esik, vagy egy paralelogramma négy csúcsa.

Ha az adott pontok egy egyenesre esnek, azaz $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, akkor az F_1, F_2, F_3 és F_4 pontok is egy egyenes mentén helyezkednek el, mert az $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ egyenlőségből következik, hogy

$$\frac{\frac{a_1-2a_2}{2}}{\frac{a_2+2a_1}{2}} = \frac{\frac{b_1-2b_2}{2}}{\frac{b_2+2b_1}{2}}.$$

8. Hány valós megoldása van az

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x + 3} = k$$

egyenletnek, ha a k valós paraméter?

Megoldás. A nevező sosem nulla, az adott egyenlet ekvivalens átalakításával a következő, legfeljebb másodfokú egyenlethez jutunk: $(k-1)x^2 + (2k+4)x + 3k - 4 = 0$. Ha $k = 1$, akkor $6x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{6}$. Ekkor egy valós megoldás van. Ha $k \neq 1$, akkor másodfokú az egyenlet, és a diszkriminánsa $D = (2k+4)^2 - 4(k-1)(3k-4) = -8k^2 + 44k$. Ha $D = 0$, azaz $k = 0$, vagy $k = 5,5$, akkor szintén egy valós megoldása (egy kétszeres gyöke) van az egyenletnek. Ha D pozitív, azaz $0 < k < \frac{11}{2}$, de $k \neq 1$, akkor két különböző valós megoldás van. Ha D negatív, azaz $k < 0$ vagy $k > \frac{11}{2}$, akkor nincs valós megoldás.

Megjegyzés: Az eredményből következik, hogy a valós számok halmazán értelmezett $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x + 3}$ törtkifejezés értékkészlete a $\left[0; \frac{11}{2}\right]$ zárt intervallum.

9. Egy dobozban n darab fehér és kétszer annyi fekete golyó van ($n \geq 3$), amelyek tapintással nem különböztethetők meg. Visszatevés nélkül kihúzzunk 3 darabot.

a) A ξ valószínűségi változó jelentse a mintában lévő fehér golyók számát. Határozzuk meg a $P(\xi = 0)$, $P(\xi = 1)$, $P(\xi = 2)$ és a $P(\xi = 3)$ valószínűségeket.

b) Milyen n esetén lesz 0,25-nál nagyobb annak a valószínűsége, hogy legalább 2 fehér golyó van a mintában?

c) Mennyi az a) részben kiszámított valószínűségek határértéke, ha az n tart a $+\infty$ -hez?

d) Hogyan módosulnak az a) részben megadott valószínűségek, ha visszatevéses mintával dolgozunk?

Megoldás. a) A mintában lévő fehér golyók száma ξ , amelynek értékei 0, 1, 2 vagy 3.

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{n}{0} \cdot \binom{2n}{3}}{\binom{3n}{3}} = \frac{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6}} = \frac{8n^2 - 12n + 4}{27n^2 - 27n + 6},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{n}{1} \cdot \binom{2n}{2}}{\binom{3n}{3}} = \frac{n \cdot \frac{2n(2n-1)}{2}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6}} = \frac{4n^2 - 2n}{9n^2 - 9n + 2},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{n}{2} \cdot \binom{2n}{1}}{\binom{3n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2n}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6}} = \frac{2n^2 - 2n}{9n^2 - 9n + 2},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{\binom{n}{3} \cdot \binom{2n}{0}}{\binom{3n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6}} = \frac{n^2 - 3n + 2}{3 \cdot (9n^2 - 9n + 2)}.$$

b) Annak valószínűsége, hogy legalább két fehér golyó van a mintában:

$$P(\xi \geq 2) = \frac{3 \cdot (2n^2 - 2n) + n^2 - 3n + 2}{3 \cdot (9n^2 - 9n + 2)} = \frac{7n^2 - 9n + 2}{27n^2 - 27n + 6} > \frac{1}{4}.$$

A nevező pozitív számok szorzata (n legalább 3), ezért a fenti egyenlőtlenség egyenértékű az $n^2 - 9n + 2 > 0$ egyenlőtlenséggel. Ennek megoldása $n < \frac{9 - \sqrt{73}}{2} \approx 0,228$ vagy $n > \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \approx 8,772$. Ezek alapján az n legalább 9.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = 0) = \frac{8}{27}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = 1) = \frac{12}{27}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = 2) = \frac{6}{27}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = 3) = \frac{1}{27}$.

d) Visszatevéses mintával dolgozva

$$P(\xi = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$$P(\xi = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27},$$

$$P(\xi = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27},$$

$$P(\xi = 3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}.$$

Megjegyzés: Ezek a valószínűségek rendre megegyeznek a c) részben kiszámított határértékekkel.