I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Melyek azok az a, b, c egész számok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség?

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = a + b + c + a \cdot b \cdot c$$

10 pont

2. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$x^4 - 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x + 1 = 0$$

egyenletet! 10 pont

3. Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalain vegyük fel rendre a D, E, F pontokat úgy, hogy teljesüljön a

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$$

egyenlőség! Jelölje az ABC háromszög kerületét k, a DEF háromszög kerületét k_1! Bizonyítsa be, hogy $k_1 < \frac{3}{4}k$!
10 pont

4. Legyen az ABC háromszögben az A csúcsból húzott magasságvonal és a BC oldal metszéspontja D, a B pontból induló belső szögfelező és az AC oldal metszéspontja E. Mekkora az EDC szög nagysága, ha $AEB\sphericalangle = 45°$? 10 pont

5. Legfeljebb hány háromszög teljesíti az alábbi feltételek mindegyikét:

– tompaszögűek,

– oldalaik hossza centiméterben mérve egész szám,

– oldalaik hossza centiméterben mérve egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja,

– közülük semelyik kettő nem egybevágó?

Fejezze ki a háromszögek számát a számtani sorozat különbségével! 10 pont

6. A valós számok halmazán értelmezett másodfokú $f(x)$ függvény minden x számra eleget tesz a

$$3 \cdot f(x) + f(2 - x) = x^2$$

egyenlőségnek. Hány olyan, 2005-nél nem nagyobb x természetes szám van, amelyre igaz, hogy $f(x) > \frac{13}{4}$? 10 pont

Második forduló

1. Oldja meg az $(x + y) + (x - y) + x \cdot y + \frac{x}{y} = 363$ egyenletet, ha x és y egész számok! 10 pont

2. Az ABC háromszög súlyvonalai az S pontban metszik egymást. Bizonyítsa be, hogy az

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3 \cdot (SA^2 + SB^2 + SC^2)$$

egyenlőség teljesül! 10 pont

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőséget, ha p (pozitív) prímszám:

$$\log_{\frac{p}{p+6-p^2}} \left(\frac{x^2}{2} - 5 \cdot x + 13\right) \geq 1.$$

10 pont

4. Az ABC háromszög egyik oldalát két, a másik oldalát három, a harmadik oldalát négy egyenlő részre osztottuk. Az osztópontok rendre: az AB oldalon P, a BC oldalon Q_1 és Q_2, a CA oldalon R_1, R_2, R_3. Tekintsük az összes olyan háromszöget, amelynek mindhárom csúcsa különböző oldalon levő osztópont. Melyik háromszögnek legkisebb a területe? 10 pont

5. Egy kocka minden csúcsához írjuk oda az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számok valamelyikét úgy, hogy a testátlók végpontjaiba írt két-két szám összege ugyanannyi legyen. (A kocka csúcsainak minden egyes megjelölésénél mind a nyolc számot fel kell használnunk.) Hányféleképpen jelölhetjük meg az előbb ismertetett módon a kocka csúcsait, ha az elforgatással egymásba átvihető eseteket nem tekintjük különbözőnek? 10 pont

Harmadik (döntő) forduló

1. Igazolja, hogy három egymás után következő egész szám négyzetének összege nem lehet egy egész szám köbe! 10 pont

2. Mennyi az a paraméter értéke, ha az $x^2 = y^2$ és az $(x-a)^2 + y^2 = 1$ egyenletekből álló egyenletrendszernek pontosan három megoldása van? 10 pont

3. Egy A_0 végpontú félegyenesen rendre fölvesszük az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokat úgy, hogy

$$d(A_0A_1) = 1,\ d(A_1A_2) = 3,\ d(A_2A_3) = 5,\ \ldots,\ d(A_{n-1}A_n) = 2n-1.$$

A kapott $A_{i-1}A_i$ szakaszokra a szakaszokkal egyenlő oldalhosszúságú szabályos háromszögeket szerkesztünk, amelyeknek a félegyenesre nem illeszkedő csúcsai $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Bizonyítsa be, hogy $d(A_1C_i)$ minden i-re egész $(i = 1, 2, \ldots, n)$!

Milyen görbén helyezkednek el a C_i pontok? 10 pont

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Két iskola tanulói műveltségi vetélkedőn vettek részt. A 100 pontos teszten az első iskola diákjainak átlag pontszáma 74, ebből a fiúké 71, a lányoké 76. A második iskolába járó diákok átlaga 84 pont, ebből a fiúké 81, a lányoké 90 pont volt. Az összes résztvevő fiú átlaga 79 pont. Mennyi az összes résztvevő lány átlaga? 7 pont

2. (a) Ábrázolja az $[1, \infty)$ halmazon értelmezett következő függvényt:

$$x \mapsto \sqrt[4]{1-2x+x^2} - \sqrt{x - \sqrt{4x-4}}.$$

(b) Jellemezze a függvényt a következő tulajdonságok szerint:
zérushelyek, értékkészlet,
korlátosság, szélsőértékek,
növekedés-csökkenés, monotonitás. 7 pont

3. Egy kocka éleit megszámozták az $1, 2, \ldots, 12$ számokkal. András kiválaszt két olyan számot, amelyekhez tartozó éleknek egy közös csúcsuk van. Ugyanezt teszi tőle függetlenül Béla is. Mekkora a valószínűsége, hogy az András által választott éleknek nincs közös pontja a Béla által választott élekkel? 7 pont

4. Az ABC hegyesszögű háromszög A, B, C csúcsaiból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, C_1. A háromszög magasságpontja M, a BM szakasz felezőpontja F. A C_1F egyenes a BC oldalt Q-ban, az A_1B_1 egyenes a CC_1-et S-ben metszi.

Bizonyítsuk be, hogy QS merőleges AC-re. 7 pont

5. Jelölje $f(n)$ azoknak az n jegyű pozitív egészeknek a számát, amelyekre igaz, hogy az n számjegy közt előfordul az 1-es és a 2-es számjegy is. Bizonyítsuk be, hogy $f(n)$ nem lehet négyzetszám, ha $n \geq 2$. 7 pont

Második forduló

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget, ha $x > 0$:

$$x^{2\sin x - \cos(2x)} < \frac{1}{x}.$$

7 pont

2. A valós számokon értelmezett $f(x) = ax^2 - bx + c$ másodfokú függvény a együtthatójára $1 > |a| \neq 0$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(a) = -b$ és $f(b) = -a$, akkor $|c| < 3$. 7 pont

3. Az $ABCD$ konvex négyszögben $ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$. Legyenek a BC és AD élek felezőpontjai rendre E és F. Az AC és BD átlók metszéspontjának az AB és CD oldalegyenesekre eső merőleges vetületei G és H.

Igazoljuk, hogy az EF és GH egyenesek egymásra merőlegesek. 7 pont

4. Az a, b, c és d egészek olyanok, hogy az ac, $bc + ad$, bd mindegyike osztható az n egésszel.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $bc + ad$ összeg tagjai külön-külön is oszthatók n-nel, azaz $n \mid bc$ és $n \mid ad$. 7 pont

Harmadik (döntő) forduló

1. A nemnegatív egészeken értelmezett $t(n)$ függvényre $t(0) = t(1) = 0$, $t(2) = 1$. Ha $n > 2$, akkor $t(n)$ a legkisebb olyan pozitív egész, amely nem osztja az n számot. Legyen $T(n) = t\big(t\big(t(n)\big)\big)$. Határozzuk meg S értékét, ha

$$S = T(1) + T(2) + T(3) + \ldots + T(2005) + T(2006).$$

7 pont

2. Építünk egy, az A kezdőpontból induló, összesen 2006 darab útszakaszból álló úthálózatot, amely körutat nem tartalmaz. (Ezt úgy értjük, hogy a hálózat bármely pontjából bármely másik pontjába pontosan egy módon juthatunk el egymáshoz csatlakozó útszakaszokon.) Bármely két útszakasznak nincs közös belső pontja és legfeljebb egy végpontjuk közös. Az úthálózat egyik pontjába egy értéktárgyat rejtettünk el. Az A kezdőpontból elindul egy játékos, aki ezt szeretné megtalálni. Minden elágazásnál az onnan induló, még be nem járt útszakaszok közül egyenlő valószínűséggel választja ki, merre menjen tovább. Visszafordulni nem szabad útja során.

Az úthálózatot úgy építettük meg, hogy a legkisebb legyen a valószínűsége annak, hogy a játékos megtalálja az értéktárgyat. Mekkora ez a minimális valószínűség? 7 pont

3. Adott a síkon egy K középpontú egységsugarú kör és egy ezt nem metsző e egyenes. K-ból az e egyenesre emelt merőleges talppontja O, $KO = 2$. Legyen H azoknak a köröknek a halmaza, amelyeknek a középpontja e-n van és kívülről érintik a K középpontú egységkört.

Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan P pont, amelyből H minden körének e-n levő átmérője ugyanakkora ($0°$-nál nagyobb) szögben látszik. Határozzuk meg P helyzetét és a látószög mértékét. 7 pont

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Igaz-e, hogy a $7k + 3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 12321.) 7 pont

2. Adott legalább kettő, de véges sok $1/2^k$ alakú szám, amelyek összege legfeljebb 1 (és minden k pozitív egész). Lássuk be, hogy a számok két csoportba sorolhatók úgy, hogy mindkét csoportban a számok összege legfeljebb $1/2$. 7 pont

5. A $[0, 1]$ intervallumot 999 piros ponttal 1000 egyenlő részre, 1110 kék ponttal pedig 1111 egyenlő részre osztjuk fel. Mennyi a legkisebb távolság egy piros és egy kék pont között, és ez hány pontpárnál fordul elő? 7 pont

3. Egy tetraédernek legalább négy éle legfeljebb egységnyi hosszúságú. Mekkora lehet maximálisan a tetraéder térfogata? 7 pont

4. Legyen AB az O középpontú k körnek egy olyan húrja, amely nem átmérő. Jelölje M az AB szakasz felezőpontját, R pedig az OM félegyenesnek a k-val vett metszéspontját. Vegyünk fel egy tetszőleges P belső pontot a rövidebbik AR íven. A PM félegyenes messe a kört a Q pontban, és legyen S az AB és QR húrok metszéspontja. Az RS és PM szakaszok közül melyik a hosszabbik? 7 pont

Második (döntő) forduló

1. Egy tetszőleges, nem derékszögű háromszög esetén rajzoljuk meg a talpponti háromszöget, majd ennek a talpponti háromszögét stb. (a talpponti háromszög csúcsai a három magasságvonalnak a hozzájuk tartozó oldalegyenessel való metszéspontjai). Hány olyan, páronként nem hasonló háromszög létezik, amelynek a szögei fokokban mérve egész számok, és az eljárás során előbb-utóbb az eredetihez hasonló háromszöghöz jutunk?

2. Az r és s pozitív egészekről tudjuk, hogy bármely k pozitív egészre ks-nek legalább annyi osztója van, mint kr-nek. Lássuk be, hogy r osztója s-nek.

3. Egy kocka élhossza n egység. A felületét alkotó $6n^2$ darab egységnégyzet közül maximálisan hányat lehet kijelölni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös oldala?