KEZDŐK

Első forduló

Mindhárom kategória

1. Aladár és Béla együtt ünnepli születésnapját 2006-ban. Aladár pontosan kétszer annyi idős, mint Béla. Aladár születési évének utolsó két számjegyét felcserélve éppen Béla születési évét kapjuk. Mennyi idősek most? (6 pont)

2. Rest Elek nem készült a dolgozatra, de tudta, hogy ugyanazokat a feladatokat szokták kapni, mint a párhuzamos osztály, legfeljebb más sorrendben. Megtudta, hogy a párhuzamos osztályban A, C, D, B voltak a helyes válaszok. Így ő is ezt írta le valamilyen sorrendben. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a) nem lesz jó válasza; b) pontosan 1 jó válasza lesz; c) pontosan 2 jó válasza lesz; d) pontosan 3 jó válasza lesz; e) mind a négy válasza jó lesz? (6 pont)

3. Hányféleképpen lehet (a tízes számrendszerben) a 2006-ot legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként felírni? (8 pont)

4. Az $ABCD$ derékszögű trapézban AB párhuzamos CD-vel, AD merőleges AB-re és $AB = AD = 2CD$. Jelölje M az AC és BD átlók metszéspontját, és F az AD oldal felezőpontját! Bizonyítsa be, hogy MF merőleges BC-re! (10 pont)

5. Oldja meg a

$$p^q + q^p = r$$

egyenletet, ha p, q, r pozitív prímszámok! (10 pont)

Második (döntő) forduló

I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók

1. Igazolja, hogy $9^n + 8^n + 7^n + 6^n - 4^n - 3^n - 2^n - 1^n$ bármely n természetes szám esetén osztható 10-zel!

2. Adott egy hegyesszög tartomány belsejében a P pont. Szerkesszen P-n át olyan egyenest, amely mind a két szögszárat metszi és a szögtartományból a legkisebb területű háromszöget metszi ki!

3. Igazolja, hogy ha az x valós számra $3 \leq x \leq 16$, akkor:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-6} + \sqrt{49-3x} \leq 12.$$

II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

1. Le lehet-e ültetni egy kerek asztal köré hat olyan embert, akik közül mindenkinek pontosan két haragosa van (a harag kölcsönös) úgy, hogy senki ne üljön haragosa mellett?

2. Egy 4 dm élű kocka mindegyik csúcsát levágtuk olyan síkkal, amely a csúcsból induló élek felezőpontjaira illeszkedik. Az így kapott testtel ugyanígy jártunk el. Mennyi a most keletkezett test felszíne?

3. Tekintsük azokat a 9-jegyű számokat, amelyek az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyekből képezhetők úgy, hogy minden számjegy pontosan egyszer szerepel. Rendezzük ezeket növekvő sorba, majd vegyük a szomszédos számok különbségét! Melyek azok a számok, amelyek a kapott számok között páratlan sokszor szerepelnek?

III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

1. Aladár és Béla a következő játékot játsszák. Felváltva mondanak egy-egy pozitív egész számot, azzal a megkötéssel, hogy a kimondott szám mindig kisebb, de legalább fele akkora legyen, mint az előzőleg elhangzott szám. Az győz, aki először mondja ki az 1-et. Aladár a 2006-os számmal kezdi a játékot. Mit kell erre mondania Bélának, ha azt akarja, hogy biztosan nyerjen?

2. Adott egy egységsugarú kör. Tekintsük azokat a körbe írható 2006-szögeket, melyek belsejükben tartalmazzák a kör középpontját. Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen sokszög kerülete nagyobb, mint 4 egység!

3. Igazolja, hogy ha a p és a q pozitív egész számokra fennáll a $p^{q^p} = q^{p^q}$ egyenlőség, akkor $p = q$.

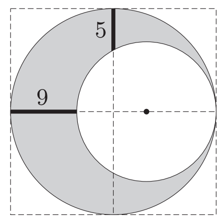
HALADÓK

I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Hány olyan egész számokból álló $(x;y)$ számpár van, amelyre $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2005}$ teljesül?

2. A szultán kastélya egy négyzet alakú területen épült, és félhold alakú tó veszi körül, az *ábrán* látható módon.



A tavon két híd vezet át, melyek egyenese átmegy a négyzet középpontján. A hidak hossza 5 és 9 méter. Mekkora a négyzet alakú terület?

3. Ha $x<-1$, akkor mi az

$$\left| x^{-1}-\frac{\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1}\right|$$

kifejezés legkisebb értéke?

4. Az ABC háromszögben AA_1, BB_1, CC_1 magasságok, AA_2, BB_2, CC_2 súlyvonalak. Bizonyítsuk be, hogy az $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ töröttvonal hossza az ABC háromszög kerületével egyenlő!

5. Határozza meg azokat az egész számokból álló $(x;y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(x+2)^4-x^4=y^3.$$

Második forduló

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $\left(\sqrt{2}-1\right)^6=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ egyenletet!

2. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög súlyvonalaiból – mint oldalakból – derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor a szerkesztett háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz.

3. Milyen n pozitív egész esetén oldható meg az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ll} x+y+z=1 & \\ xyz=2^n & \end{array} \qquad \text{ha} \quad x,y,z\in\mathbb{Z}?$$

4. Válasszunk ki egy kocka csúcsai közül az összes lehetséges módon hármat, és tekintsük a csúcsok által meghatározott háromszögeket! Mekkora a kapott derékszögű háromszögek számának és az összes háromszög számának aránya?

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & (x+y)^3=z, \\ \text{II.} & (y+z)^3=x, \\ \text{III.} & (z+x)^3=y. \end{array}$$

2. Az AB szakasz egy belső pontja C, amire $AC>CB$. Az AB és BC szakaszok, mint átmérő fölé (AB azonos oldalán) félköröket rajzolunk, legyenek ezek rendre k_1 és k_2. Az AB-re C-ben állított merőleges m. A k kör érinti az

m egyenest, a k_2 félkört kívülről, a k_1 félkört pedig belülről. Legyen k középpontja O, és jelölje k és k_2 érintési pontját E. Végül az OE egyenes és m metszéspontja M.

Mutassuk meg, hogy $AC = EM$!

3. Nevezzünk egy halmazt *csonkának,* ha nincs két – nem feltétlenül különböző – elem a halmazban, aminek az összege is eleme a halmaznak. Mekkora az $\{1, 2, 3, \ldots, 2n+1\}$ halmaz maximális elemszámú *csonka* részhalmaza?

II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Az a és b valós számra $a^2 + b^2 = 1$ teljesül, ahol $ab \neq 0$. Határozzuk meg az

$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\left(1 + \frac{1}{b^2}\right)$$

szorzat minimumát.

2. Az AB alapú egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja F, súlypontja S, magasságpontja M, beírt köre k. Ha $FM = \sqrt{6}$ és S illeszkedik k-ra, akkor mekkora a háromszög kerülete?

3. A Piramis Bank elnöke a külvárosból jár be munkahelyére dolgozni. Hétköznapokon egy sofőr jön érte, aki minden nap ugyanabban az időpontban indul a banktól, felveszi az elnököt, és pontosan nyitásra megérkeznek. Egyik reggel a sofőr telefonált, hogy valami baj van az autóval, ezért valószínűleg késni fog. Az elnök emiatt a szokottnál egy órával korábban, gyalog indult munkába. A sofőr közben megjavította az autót, és mégis el tudott indulni a szokásos időpontban, így útközben találkozott a bankárral. Felvette, és nyitás előtt 20 perccel érkeztek a bankhoz.

Mennyi ideig sétált a bankár? (Feltehetjük, hogy az autó sebessége állandó és az utas felvétele nem jár időveszteséggel.)

4. Egy ABC hegyesszögű háromszög belsejében egy tetszőleges O pontból merőlegeseket bocsátunk az AB, BC és CA oldalakra. A talppontokat rendre jelöljük R-rel, P-vel és Q-val. Rajzoljunk kifelé négyzeteket az RB-re, PC-re és AQ-ra.

Mekkora a három négyzet területének összege, ha tudjuk, hogy $AR = 7$, $BP = 5$ és $CQ = 6$?

5. Határozza meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3.$$

Második forduló

1. Határozza meg az a, b, c egészek értékét úgy, hogy a következő egyenlőség minden valós x-re teljesüljön:

$$(x-a)\cdot(x-10)+1 = (x+b)\cdot(x+c).$$

2. A t területű, m magasságú $ABCD$ húrtrapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M, a trapéz körülírt körének középpontja O. A BC oldal felezőpontja E, az AD oldalé pedig F. Bizonyítsuk be, hogy ha $t = m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

3. Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+4}$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét!

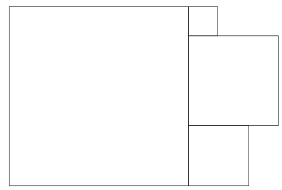
4. Az (a_n) számsorozatot a következő módon határozzuk meg: $a_1 = a$, ahol az „a” szám pozitív egész szám, $n \geq 1$ esetén pedig

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,a_n, & \text{ha } a_n \text{ páros szám,} \\ 2a_n + 2, & \text{ha } a_n \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy $a = 2^{2006} + 5$ esetén a sorozatnak tagja az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike.

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy négyzet egyik oldalára az *ábrán* látható módon három kisebb négyzetet rajzoltunk. Kössük össze a nagy és a középső kis négyzet középpontját, valamint a két szélső négyzet középpontját. Bizonyítsa be, hogy ezek a szakaszok derékszöget zárnak be!



2. Milyen n természetes számra igaz, hogy a $4^{2005}+4^{2006}+4^n$ összeg értéke négyzetszám?

3. Egy különleges számológép legfeljebb 10-jegyű nemnegatív egész számokkal tud dolgozni. Két művelet van a gépen. Az „`N`” művelet négyzetre emel, a „`T`” művelet pedig levágja a szám utolsó (egyesek helyén álló) jegyét, ha a szám legalább kétjegyű.

Egy alkalommal valaki egy legfeljebb háromjegyű számból kiindulva, több művelet végrehajtása után, a 2 számot kapta eredményül.

Mi lehetett az eredeti szám?

III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x^2=y^2+z^2+1, \tag{1}$$

$$x=y+z-3. \tag{2}$$

2. Az AB szakasz A csúcshoz közelebbi harmadolópontja H. Az AHC és HBD szabályos háromszögek az AB egyenes azonos oldalán helyezkednek el. AD és HC metszéspontja P, BC és HD metszéspontja Q, AD és BC metszéspontja M. Határozzuk meg a $PQ:AB$ arány értékét, és bizonyítsuk be, hogy az M, P, H, Q pontok egy körön vannak.

3. Legyen x tetszőleges pozitív egész szám, és jelölje $f(x)$ az x szám és x számjegyei összegének különbségét, ahol $f(x)=0$, ha az x szám egyjegyű. Oldjuk meg az $f\bigl(f\bigl(f(x)\bigr)\bigr)=9$ egyenletet!

4. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2006}=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

egyenlet megoldható a pozitív egész számok halmazán!

5. Adott $2n+3$ pont a síkon úgy, hogy nincs 3 egy egyenesen, és nincs 4 egy körön. Bizonyítsa be, hogy mindig létezik egy k kör, ami pontosan 3 ponton megy keresztül, és n pont van a kör belsejében és n a körön kívül!

Második (döntő) forduló

1. Az AB átfogójú derékszögű háromszögben $AC>BC$. A háromszög köréírt körét a C csúcsból induló magasságvonal az E, míg a C-ből induló belső szögfelező a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a $BCDE$ négyszög területe megegyezik az ABC háromszög területével.

2. Definiáljuk az x_i sorozatot a következőképpen:

$$x_1=1,$$
$$x_{k+1}=x_k^2+x_k, \qquad k\ge 1, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Bizonyítsuk be, hogy az

$$S=\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_{2006}}$$

összeg 1-nél kisebb!

3. Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet belsejében végtelen sok olyan P pont van, amelyre igaz, hogy a $\frac{PB}{PA}$, $\frac{PC}{PA}$, $\frac{PD}{PA}$ arányok mindegyike racionális szám.