

## I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:  $(x - \sqrt{x-2} - 2)(x - \sqrt{x-3} - 3) = 0$ . (11 pont)

**Megoldás.** Értelmezési tartomány:  $x \geq 3$ . Szorzattá alakítva:

$$\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-1)\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}-1) = 0.$$

Egy szorzat akkor nulla, ha legalább egy tényezője nulla. A négy tényező rendre a 2, 3, 3, 4 helyen nulla. Az értelmezési tartományt figyelembe véve az egyenlet megoldása:  $x_1 = 3, x_2 = 4$ .

2. Adott az  $f: ]-1; 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |(x-2)^2 - 4| - 4$  függvény.

a) Adjuk meg a koordinátarendszerben azon rácspontokat, amelyek illeszkednek a függvény grafikonjára.

b) Adjuk meg a függvény zérushelyeit.

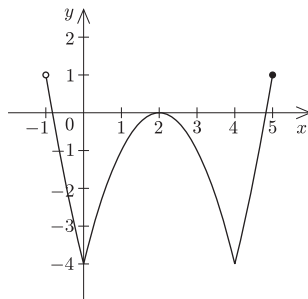
c) Mely intervallumokon növekedő a függvény? (12 pont)

**Megoldás.** a) A függvény értelmezési tartományában hat egész szám található (a 0, 1, 2, 3, 4 és az 5), ezért hatnál több rácspontra nem illeszkedhet a függvény grafikonjára. A függvény egész számhoz egész számot rendel, így hat rácspontot kapunk: (0; -4), (1; -1), (2; 0), (3; -1), (4; -4) és (5; 1).

b) Ha  $(x-2)^2 \geq 4$ , azaz  $x \leq 0$  vagy  $4 \leq x$ , akkor  $(x-2)^2 - 4 - 4 = 0$ . Innen kapjuk:  $x_1 = 2 - 2\sqrt{2}, x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$ . Ezek az értékek minden feltételnek megfelelnek, így a függvény zérushelyei.

Ha  $(x-2)^2 < 4$ , azaz  $0 < x < 4$ , akkor  $-(x-2)^2 + 4 - 4 = 0$ . Innen az  $x_3 = 2$  zérushelyet kapjuk.

c) A normálparabola transzformálásával a függvény képe megrajzolható. A  $[0; 2]$  és a  $[4; 5]$  intervallumokon a függvény növekedő.



3. A koordinátarendszerben adott két pont:  $A(1; 5)$  és  $B(7; 7)$ . Adjuk meg az  $x$  tengely azon  $P$  pontjának koordinátáit, amelyre

a)  $AP = BP$ ;

b)  $AP^2 + BP^2 = 94$ ;

c)  $AP + BP$  minimális.

(14 pont)

**Megoldás.** a) Az  $AB$  szakasz felező merőlegesének és az  $x$  tengelynek a metszéspontja az egyetlen megfelelő pont. Az  $AB$  felező merőleges az  $F(4; 6)$  felezőpontra illeszkedik, a normálvektora pedig  $\vec{n}(3; 1)$ , az egyenlete:  $3x + y = 18$ . Ez az egyenes az  $x$  tengelyt a  $P_1(6; 0)$  pontban metszi. Ez a keresett pont.

b) Az  $AP^2 + BP^2 = 94$  feltételnek megfelelő  $P(x; y)$  pontok koordinátáira teljesülni kell a következő egyenletnek:  $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (x-7)^2 + (y-7)^2 = 94$ , amelyet az  $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 37$  alakra tudunk hozni. Ez egy kör egyenlete. A feladat feltételeinek megfelelő pontok az  $F(4; 6)$  középpontú,  $\sqrt{37}$  sugarú kör és az  $x$  tengely metszéspontjai lesznek. Az  $y = 0$  helyettesítéssel két  $x$  értéket kapunk. A feladat két megoldása:  $P_2(3; 0), P_3(5; 0)$ .

c) Igazolható, hogy az  $A'B$  egyenes és az  $x$  tengely metszéspontja a feltételeknek megfelelő pont, ahol  $A'(1; -5)$  az  $A$  tükörképe az  $x$  tengelyre. Az  $A'B$  egyenes egyenlete:  $2x - y - 7 = 0$ . Ez az egyenes az  $x$  tengelyt a  $P_4\left(\frac{7}{2}; 0\right)$  pontban metszi. Ez a keresett pont.

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} 2^{3x+2} &= 4y^3 - 407y + 20 \\ x &= \log_2(y-4). \end{aligned} \right\} \quad (14 \text{ pont})$$

**Megoldás.** Az értelmezési tartomány:  $x$  valós szám,  $y > 4$ . A második egyenlet szerint:  $2^x = y - 4$ . Ekkor  $2^{3x+2} = 4 \cdot (2^x)^3 = 4(y-4)^3 = 4y^3 - 48y^2 + 192y - 256$ . Ez az első egyenlet alapján:  $4y^3 - 48y^2 + 192y - 256 = 4y^3 - 407y + 20$ , azaz  $0 = 48y^2 - 599y + 276$ . A másodfokú egyenletet megoldva:  $y_1 = 12, y_2 = \frac{23}{48}$ . Csak  $y_1$  eleme az értelmezési tartománynak, a második egyenletbe behelyettesítve megkapjuk  $x$  értékét.

Az egyenletrendszer megoldása:  $x = 3, y = 12$ .

## II. rész

5. Egy mértani sorozat első eleme  $a$ , a hányadosa  $q$ . Mennyi annak a mértani sorozatnak az első eleme, amelynek a hányadosa  $q^2$ , az első 25 elem összege pedig az adott sorozat első 50 elemének összegével egyenlő? (16 pont)

**Megoldás.** Legyen a keresett mértani sorozat első eleme  $b_1$ . Ha  $q = 1$ , akkor  $S_{50} = 50a_1 = 25b_1$ , tehát  $b_1 = 2a_1$ . Ha  $q = -1$ , akkor  $S_{50} = 0 = 25b_1$ , azaz  $b_1 = 0$ . Ha  $q^2 \neq 1$ , akkor az összegképlet és a feltétel felhasználásával

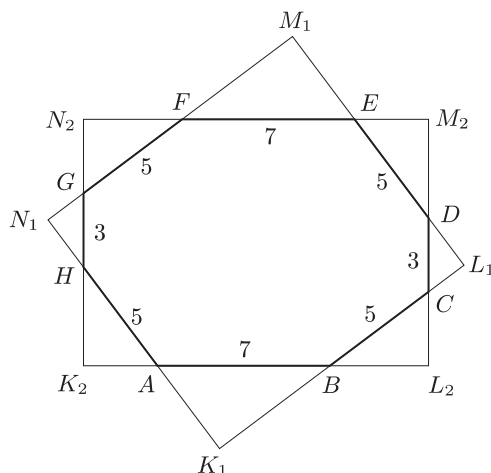
$$b_1 \frac{(q^2)^{25} - 1}{q^2 - 1} = b_1 \frac{q^{50} - 1}{q^2 - 1} = a_1 \frac{q^{50} - 1}{q - 1}.$$

Ebből következik, hogy  $a_1 = \frac{b_1}{q + 1}$ , vagyis  $b_1 = a_1(1 + q) = a_1 + a_2$ .

Az új sorozat első tagja az adott sorozat első és második tagjának összegével egyenlő és ez a  $q^2 = 1$  esetben is igaz.

6. Egy érettségiző osztály a tablóját középpontosan szimmetrikus nyolcszög alakúra tervezte. A nyolcszöget egy  $1 \text{ m} \times 1,4 \text{ m}$ -es téglalap alakú lemezről szeretnék volna elkészíteni úgy, hogy a téglalap sarkainál négy egybevágó derékszögű háromszöget levágatnak. Ekkor természetesen a téglalap négy oldalegyenese a nyolcszögnek is oldalegyenese lesz. Az így kapott nyolcszög oldalai deciméterben mérve sorban: 7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 5. Mennyivel változna a hulladék mennyisége, ha ezt a nyolcszöget a másik négy oldalegyenese által meghatározott téglalpból vágatták volna ki? (16 pont)

**Megoldás.** A vázlatrajzon megrajzoltuk az  $ABCDEFGH$  nyolcszöget és a lehetséges két téglalapot, a  $K_1L_1M_1N_1$  és a  $K_2L_2M_2N_2$  téglalapot.



A négy egybevágó derékszögű háromszög átfogója 5 dm. A középpontos szimmetria miatt:  $AK_2 = CL_2 = EM_2 = GN_2 = x$ , ekkor  $HK_2 = BL_2 = DM_2 = FN_2 = 7 - x$ . A Pitagorasz-tétel szerint:  $x^2 + (7 - x)^2 = 25$ . Az innen kapott két gyök nem ad két megoldást, mert amikor  $x = 3$ , akkor  $7 - x = 4$ , amikor  $x = 4$ , akkor pedig  $7 - x = 3$ . Így megkaptuk a négy egybevágó háromszög oldalainak hosszát: 3, 4, 5. (Vázlatrajzunkon  $AK_2 = 3$ .) Ezekhez hasonló háromszögeket kapunk, ha a  $K_1L_1M_1N_1$  téglalpból vágjuk le a derékszögű háromszögeket. A két-két szemközti levágott háromszög egybevágó. A hasonló derékszögű háromszögek hasonlósági arányát az átfogók aránya adja, így az ismeretlen befogók hosszát ki tudjuk számítani aránypár felírásával:

$$\frac{AK_1}{7} = \frac{3}{5}, \text{ azaz } AK_1 = EM_1 = \frac{21}{5}, \quad \frac{BK_1}{7} = \frac{4}{5}, \text{ azaz } BK_1 = FM_1 = \frac{28}{5},$$

$$\frac{CL_1}{3} = \frac{3}{5}, \text{ azaz } CL_1 = GN_1 = \frac{9}{5}, \quad \frac{DL_1}{3} = \frac{4}{5}, \text{ azaz } DL_1 = HN_1 = \frac{12}{5}.$$

A  $K_1L_1M_1N_1$  téglalap oldalainak hossza:  $K_1L_1 = \frac{28}{5} + 5 + \frac{9}{5} = \frac{62}{5}$ ,  $L_1M_1 = \frac{12}{5} + 5 + \frac{21}{5} = \frac{58}{5}$ .

Ennek a téglalapnak a területe:  $t_1 = \frac{62}{5} \cdot \frac{58}{5} = \frac{3596}{25} = 143,84 \text{ (dm}^2\text{)}$ . Ebben az esetben  $3,84 \text{ dm}^2$ -rel nagyobb lenne a hulladék, hiszen a másik téglalap területe csak  $140 \text{ dm}^2$ .

7. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív  $x$  értéket, amelyre  $\sin x$  és  $\sin 2x$  egy derékszögű háromszög befogói,  $\sin 3x$  pedig az átfogója. (16 pont)

**Megoldás.** Oldjuk meg a  $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$  egyenletet. Rendezés után  $\sin^2 2x = (\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x)$ . A jobb oldal

$$(2 \cos 2x \sin x)(2 \sin 2x \cos x) = 2 \sin^2 2x \cos 2x,$$

az egyenlet tehát  $0 = \sin^2 2x(2 \cos 2x - 1)$ . A megoldások:  $x_1 = k_1 \frac{\pi}{2}$ ,  $k_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{6} + k_2 \pi$ ,  $k_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $x_3 = -\frac{\pi}{6} + k_3 \pi$ ,  $k_3 \in \mathbb{Z}$ .

A keresett  $x$  érték a  $\frac{\pi}{6}$ . (Ekkor a háromszög oldalai:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  és 1.)

**8.** Egy áruház szeretné megajándékozni azokat, akik az akciós májkonzervből legalább hetet vásárolnak. Az áruházban a konzervdobozokat négyzet alapú gúla törnyozták. Például egy négy rétegű gúlát  $16 + 9 + 4 + 1$  darab dobozból lehet elkészíteni. A vásárlók egy szerencsekerék megforgatásával 1-től 50-ig egyenlő eséllyel sorsolhatnak egy egész számot. Ha az ennyi rétegből felépíthető gúlaiban a konzervdobozok száma osztható 7-tel, akkor az illető ajándékot kap.

- a) Az áruház dolgozói egy 16 rétegű gúlát építettek. Hány dobozt használtak fel?  
 b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ajándékra jogosító számot pörgetünk?  
 c) Az egyik vásárló olyan számot forgatott, hogy az ennyi rétegű gúlaiban a dobozok száma 7-tel és 13-mal is osztható volt. Melyik szám lehetett ez? (16 pont)

**Megoldás.** a) Az első 16 pozitív egész szám négyzetének összegét kell kiszámítanunk. Tudjuk, hogy

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ azaz } S_{16} = \frac{16(16+1)(2 \cdot 16+1)}{6} = 1496.$$

1496 darab konzervdobozból építették ezt a gúlát.

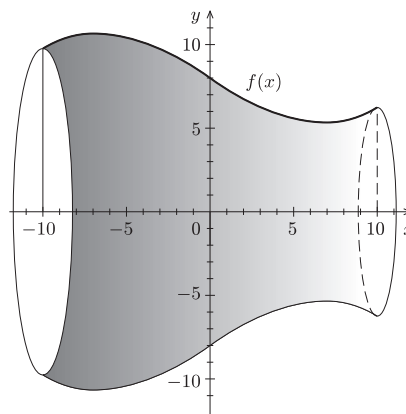
b) Először meghatározzuk azokat az  $n$  értékeket, amelyekre  $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  osztható 7-tel. Ez pontosan akkor teljesül, ha a számlálóban szereplő tényezők közül legalább egy osztható 7-tel.  $(6; 7) = 1$ ,  $n = 7k$  vagy  $n = 7k - 1$  vagy  $n = 7k + 3$  ( $k$  természetes szám). Az  $[1; 50]$  intervallumban az ilyen számok: 3, 6, 7, 10, 13, 14, 17, 20, 21, 24, 27, 28, 31, 34, 35, 38, 41, 42, 45, 48, 49, összesen 21 darab.

$\frac{21}{50}$ , azaz 0,42 az esélye annak, hogy aki szerencsekeréket pörget, az valamilyen ajándékot kap.

c) Most azokat az  $n$  értékeket határozzuk meg, amelyekre az  $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  osztható 13-mal. Ez pontosan akkor teljesül, ha a számlálóban szereplő tényezők közül legalább egy osztható 13-mal.  $(6; 13) = 1$ ,  $n = 13k$  vagy  $n = 13k - 1$  vagy  $n = 13k + 6$  ( $k$  természetes szám). Ezek közül az  $[1; 50]$  intervallumba a következő számok esnek: 6, 12, 13, 19, 25, 26, 32, 38, 39, 45. A 6, 13, 38 és 45 szerepelt a 7-tel oszthatóságnál is.

A vásárló e négy szám valamelyikét sorsolta ki.

**9.** Mennyi annak a forgástestnek a térfogata, amely az  $f: [-10; 10] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0,004x(x+12)(x-12) + 8$  harmadfokú függvény képének az  $x$  tengely körüli megforgatásával jön létre? (16 pont)



**Megoldás.** a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,004x(x+12)(x-12) + 8 = \\ &= 0,004(x^3 - 144x + 2000). \end{aligned}$$

Használjuk a forgástestekre vonatkozó térfogatképletet:  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ . Ekkor

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-10}^{10} [0,004(x^3 - 144x + 2000)]^2 dx = \\ &= \frac{\pi}{250^2} \int_{-10}^{10} (x^6 + 20\,736x^2 + 4\,000\,000 - 288x^4 + 4000x^3 - 576\,000x) dx = \\ &= \frac{\pi}{250^2} \left[ \frac{x^7}{7} + 20\,736 \frac{x^3}{3} + 4\,000\,000x - 288 \frac{x^5}{5} + 4000 \frac{x^4}{4} - 576\,000 \frac{x^2}{2} \right]_{-10}^{10} = \\ &= \frac{\pi}{250^2} \left[ \frac{x^7}{7} + 6912x^3 + 4 \cdot 10^6 x - \frac{288}{5}x^5 + 10^3 x^4 - 288 \cdot 10^3 x^2 \right]_{-10}^{10} = \\ &= \frac{\pi}{250^2} \left( \frac{10^7}{7} + 6912 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^7 - \frac{288}{5} \cdot 10^5 + 10^7 - 288 \cdot 10^5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{10^7}{7} + 6912 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^7 - \frac{288}{5} \cdot 10^5 - 10^7 + 288 \cdot 10^5 \right) = \\ &= \frac{\pi}{250^2} \left( 2 \cdot \frac{10^7}{7} + 13824 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^7 - \frac{576}{5} \cdot 10^5 \right) \approx 4281. \end{aligned}$$