

I. rész

1. Az $a = \overline{374x25y}$ tízes számrendszerbeli számban az x és y számjegyek véletlenszerű megválasztásánál mi a valószínűsége annak, hogy a szám osztható 15-tel?

2. Két különböző sugarú kör kívülről érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy a közös belső érintőnek a közös külső érintők közötti szakasza egyenlő a két sugár mértani közepének a kétszeresével.

3. Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik az alábbi egyenletet:

a) $(x - 3) \cdot (4x - 3y) = 0$;

b) $17x^2 - 24xy + 9y^2 - 6x + 9 = 0$;

c) $\frac{4x - 3y}{x - 3} = 0$;

d) $\frac{x - 3}{4x - 3y} = 0$.

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$2^x + 2^{-x} + \frac{1}{2^x + 2^{-x}} \geq -\frac{11}{3\sqrt{2}} \log_{(3-2\sqrt{2})} (3 + 2\sqrt{2}).$$

II. rész

5. Három pozitív szám harmonikus közepe $\frac{180}{13}$, a mértani közepük $10\sqrt[3]{3}$, a négyzetes közepük pedig $\sqrt{\frac{725}{3}}$. Mivel egyenlő a számtani közepük?

6. a) A $4px^2 - (2p^3 - 8p + 2)x + p^2 - 4 = 0$ másodfokú egyenletben határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az ellentétes előjelű valós gyökök közül egyik se legyen nagyobb $\frac{1}{2}$ -nél.

b) Van-e a p paraméternek olyan értéke, amelyre az

$$y = 4px^2 - (2p^3 - 8p + 2)x + p^2 - 4$$

függvény az $x = 2$ -nél veszi fel a maximumát, és ennek értéke -8 ?

7. Az $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(-a_1; -a_2)$ és $D(-b_1; -b_2)$ pontokat forgassuk el az origó körül 90° -kal pozitív irányba, majd az így kapott pontokra alkalmazzunk origó középpű kétszeres nyújtást. A kapott pontok legyenek rendre A_1 , B_1 , C_1 és D_1 . Igazoljuk, hogy az AA_1 , BB_1 , CC_1 és DD_1 szakaszok felezőpontjai paralelogrammát határoznak meg, vagy egyenesre esnek.

8. Hány valós megoldása van az

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x + 3} = k$$

egyenletnek, ha a k valós paraméter?

9. Egy dobozban n darab fehér és kétszer annyi fekete golyó van ($n \geq 3$), amelyek tapintással nem különböztethetők meg. Visszatevés nélkül kihúzzunk 3 darabot.

a) A ξ valószínűségi változó jelentse a mintában lévő fehér golyók számát. Határozzuk meg a $P(\xi = 0)$, $P(\xi = 1)$, $P(\xi = 2)$ és a $P(\xi = 3)$ valószínűségeket.

b) Milyen n esetén lesz 0,25-nél nagyobb annak a valószínűsége, hogy legalább 2 fehér golyó van a mintában?

c) Mennyi az a) részben kiszámított valószínűségek határértéke, ha az n tart a $+\infty$ -hez?

d) Hogyan módosulnak az a) részben megadott valószínűségek, ha visszatevéses mintával dolgozunk?