A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. *Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I. A háromszög P belső pontja kielégíti a*

$$PBA\sphericalangle + PCA\sphericalangle = PBC\sphericalangle + PCB\sphericalangle$$

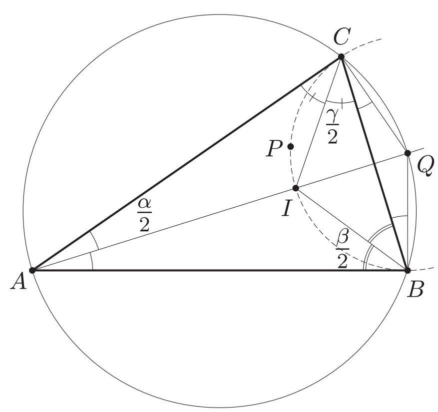
egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $AP \ge AI$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $P = I$.

Nagy Csaba megoldása. Legyenek az ABC háromszög szögei α, β, γ. A feltétel szerint egyenlő szögösszegek közös értékét jelölje φ. Ekkor $2\varphi = \beta + \gamma$, azaz $\varphi = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

$$BPC\sphericalangle = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = BIC\sphericalangle,$$

és mivel a BC egyenes nem választja el a P és I pontokat, innen következik, hogy $BIPC$ húrnégyszög, P tehát rajta van a BIC körülírt körén.

Legyen AI és az ABC körülírt körének másik metszéspontja Q (*1. ábra*). Ismeretes, hogy Q felezi az őt tartalmazó BC ívet, ezért $QB = QC$. Másfelől $QCI\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = QIC\sphericalangle$, mert az AIC háromszög külső szöge, ezért $QC = QI$. A fenti $BIPC$ húrnégyszög körülírt körének a középpontja tehát a Q, és így $QI = QP$.



1. ábra

Az APQ háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$AP + PQ \ge AQ = AI + IQ,$$

azaz valóban fennáll, hogy $AP \ge AI$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha P az AQ szakasz pontja, azaz $P = I$.

2. *Legyen P egy szabályos* 2006*-szög. P egy átlóját* jónak *nevezzük, ha a végpontjai P határát két olyan részre bontják, amelyek mindegyike P páratlan sok oldalát tartalmazza. Az oldalakat szintén* jónak *nevezzük.*

Tegyük fel, hogy P-t háromszögekre bontottuk 2003 *olyan átlóval, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja P belsejében. Határozzuk meg az ilyen felbontásokban előforduló egyenlőszárú, két jó oldallal rendelkező háromszögek számának maximumát.*

Jankó Zsuzsanna megoldása. A 2003 egymást nem metsző átló a P sokszöget 2004 háromszögre bontja, amelyek csúcsai a P csúcsai. Nevezzünk egy ilyen háromszöget jónak, ha két oldala jó és egyenlő szárú.

Legyen AB a sokszög egy átlója vagy oldala, és jelöljük n-nel az A, B csúcsokat összekötő, sokszögoldalakból álló két töröttvonal közül a rövidebbik (nem hosszabbik) oldalainak a számát ($1 \le n \le 1003$). A megrajzolt átlók azt a P_1 sokszöget is háromszögekre bontják, amelyet az n oldalszakaszból álló töröttvonal és az AB szakasz határol. (Ha $n=1$, azaz AB a P egy oldala, akkor a P_1 sokszög szakasszá fajul, a háromszögek száma 0.) Jelöljük $f(n)$-nel, hogy ezt a sokszöget az AB-t és egymást nem metsző átlók megrajzolásával (az eredeti felbontás átlói közül $(n-2)$ ilyen van) háromszögekre bontva legfeljebb hány jó háromszög jöhet létre. Az n-re vonatkozó teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy $f(n) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Ha $n=1$, akkor A és B szomszédos csúcsok P-ben, egyetlen háromszög sem jön létre P_1-ben, így jó sem, $f(1) = 0 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$. Ha $n=2$, akkor A és B másodszomszédos csúcsok P-ben, a létrejövő egyetlen háromszög jó, $f(2)=1$, az állítás igaz. Legyen most $n>2$ és tegyük föl, hogy $f(i) \le \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$, ha $2 \le i < n$. Tekintsük a P_1 sokszögnek azt a felbontását, amelynek során $f(n)$ jó háromszöget kapunk. Ebben a felbontásban a létrejövő háromszögek egyikének oldala az AB, legyen e háromszög harmadik csúcsa C (*2. ábra*). Ha az AC oldalt i, a BC-t pedig j hosszúságú töröttvonal köti össze, akkor $1 \le i, j < n$ és $i + j = n$. Ekkor nyilván

$$f(n) = \begin{cases} f(i) + f(j), & \text{ha az } ABC \text{ nem jó,} \\ f(i) + f(j) + 1, & \text{ha az } ABC \text{ jó.} \end{cases}$$

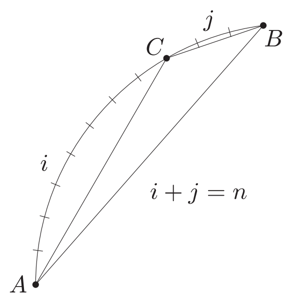
Az első esetben az indukciós föltevést tagonként alkalmazva és felhasználva, hogy $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x + y \rfloor$:

$$f(n) = f(i) + f(j) \le \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Nézzük meg, hogyan lehetséges a második eset. A P_1 megválasztása miatt AB a leghosszabb a P_1 csúcsait összekötő szakaszok közül, így az ABC háromszögben is AB a leghosszabb oldal. Ez a háromszög tehát csak úgy lehet egyenlő szárú, ha $AC = CB$. Egy egyenlő szárú háromszögnek vagy mindkét szára jó, vagy egyik sem az (a háromszögnek és P-nek közös szimmetriatengelye van), így ha az egyenlő szárú ABC háromszög jó, akkor az AC és BC szárak a jó oldalai. Ekkor i és j egyenlő páratlan számok, azaz $n = 4k+2$ alakú. Az indukciós feltevés szerint $f\left(\frac{n}{2}\right) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ és így

$$f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \le 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 = 2 \cdot k + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

az indukciós lépést igazoltuk.



2. ábra

Tekintsük ezek után a P sokszög megrajzolt átlóit. Ha van köztük olyan, amelyik áthalad a sokszög középpontján, akkor a jó háromszögek maximális száma

$$f(1003) + f(1003) \leq 2 \cdot \left\lfloor \frac{1003}{2} \right\rfloor = 1002.$$

Ha ilyen átló nincsen, akkor tekintsük a felbontásban szereplő háromszögek közül azt, amelyik a belsejében tartalmazza a sokszög középpontját. Ennek bármely két csúcsát a P félkerületénél rövidebb töröttvonal köti össze, álljanak ezek rendre a, b, c szakaszból. ($a + b + c = 2006$.) Ha ez a háromszög jó, akkor a, b és c közül kettő páratlan, a felbontás összesen legfeljebb

$$1 + \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor = 1 + \frac{a+b+c}{2} - 1 = 1003,$$

ha pedig nem jó, akkor legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{a+b+c}{2} \right\rfloor = 1003$$

jó háromszöget tartalmaz.

A kapott felső korlát éles, 1003 jó háromszög jön létre, ha a másodszomszédos csúcsokat kötjük össze, a „belső” 1003 oldalú sokszöget pedig további 1000 átló megrajzolásával tetszőleges módon háromszögekre bontjuk.

3. *Határozzuk meg a legkisebb olyan M valós számot, amire az*

$$\left|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)\right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

egyenlőtlenség teljesül minden a, b, c valós számra.

Erdélyi Márton megoldása.[1] Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán az abszolút érték belsejében álló kifejezés bármely két változó cseréje nyomán előjelet vált, és így bármely két változó különbségével osztható. Szorzattá alakítva kapjuk, hogy a bal oldal $\left|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\right|$. Az $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - a$, $t = a + b + c$ új változókat bevezetve egyrészt $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$, másrészt minden olyan x, y, z, t számnégyesre, amelyre $x + y + z = 0$, egyértelműen léteznek a megfelelő a, b, c mennyiségek. Keressük tehát a legkisebb olyan M számot, amelyre

$$|xyzt| \leq M\frac{(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2}{9}. \tag{1}$$

A három új változó, x, y és z között van két azonos előjelű, föltehető, hogy ezek x és y. Mindkettejüket a számtani középükkel helyettesítve a bal oldal értéke nő (nem csökken), a jobb oldal értéke pedig csökken (nem nő). (Ez nyomban adódik a mértani, számtani és a négyzetes közepek közti egyenlőtlenségből.) Föltehető tehát, hogy $x = y \left(= -\frac{z}{2}\right)$. Legyen $u = |x| = |y| = \left|\frac{z}{2}\right|$ és $v = |t|$. Ezekkel a változókkal (1) a

$$2u^3v \leq M\frac{(6u^2 + v^2)^2}{9} \tag{2}$$

alakba írható. A (2) egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel szorozva kapjuk, hogy

$$\sqrt{8}u^3v \leq \frac{\sqrt{2}}{9}M(6u^2 + v^2)^2,$$

[1] Más megoldások alapján.

amit az alábbi alakban is írhatunk:

$$\sqrt{2}u\cdot\sqrt{2}u\cdot\sqrt{2}u\cdot v\le\frac{\sqrt{2}}{9}M\cdot 16\left(\frac{\left(\sqrt{2}u\right)^2+\left(\sqrt{2}u\right)^2+\left(\sqrt{2}u\right)^2+v^2}{4}\right)^2.$$

Negyedik gyököt vonva:

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}u\cdot\sqrt{2}u\cdot\sqrt{2}u\cdot v}\le\sqrt[4]{\frac{16\sqrt{2}}{9}M}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}u\right)^2+\left(\sqrt{2}u\right)^2+\left(\sqrt{2}u\right)^2+v^2}{4}}. \tag{3}$$

Ha $M=\dfrac{9}{16\sqrt{2}}$, akkor (3) éppen a mértani és a négyzetes közepek közti azonosan teljesülő egyenlőtlenség, ami azt jelenti, hogy $M\le\dfrac{9}{16\sqrt{2}}$. Ez a becslés viszont éles, ugyanis ha például $a=3+\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}-3$, akkor a feladat egyenlőtlenségében az egyenlőség teljesül. Az M keresett értéke így $\dfrac{9}{16\sqrt{2}}$.

4. *Határozzuk meg az összes olyan, egész számból álló (x,y) számpárt, amire teljesül*

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2. \tag{1}$$

Tomon István megoldása. Ha $x<0$, akkor (1) bal oldala nagyobb 1-nél és kisebb 4-nél, tehát ekkor y nem egész.
Ha $x=0$, akkor $y\in\{-2,2\}$; két megoldást kapunk.
Ha $x=1$, akkor $y^2=11$, nem megoldás.
Ha $x=2$, akkor $y^2=37$, nem megoldás.
Ha $x>2$, akkor (1) bal oldala páratlan, tehát ha y egész, akkor $y=2k+1$ valamilyen k egész számra. Ekkor (1) $1+2^x+2^{2x+1}=(2k+1)^2$ alakú, ahonnan rendezés után

$$2^{x-2}(1+2^{x+1})=k(k+1). \tag{2}$$

A jobb oldali szorzat egyik tényezője páratlan, a másik páros, így az, amelyik páros, osztható 2^{x-2}-nel. Az is föltehető, hogy k nem negatív, hiszen a k negatív, illetve nemnegatív értékeire $k(k+1)$ ugyanazokat az értékeket veszi fel. (2) bal oldala pozitív, így k is pozitív.

1. eset: k páros. Ekkor $2^{x-2}\mid k$, azaz van olyan b pozitív egész, hogy $k=b\cdot 2^{x-2}$. Ezt (2)-be írva

$$2^{x-2}(1+2^{x+1})=b\cdot 2^{x-2}(b\cdot 2^{x-2}+1),\quad\text{azaz}$$

$$1+2^{x+1}=b^2\cdot 2^{x-2}+b. \tag{3}$$

Innen leolvasható, hogy $b\mid 1+2^{x+1}$, tehát b páratlan. Ha $b=1$, akkor $1+2^{x+1}>2^{x-2}+1$, (3) jobb oldala kisebb, mint a bal. Ha $b>1$, akkor $b\ge 3$, és így

$$b^2\cdot 2^{x-2}+b\ge 9\cdot 2^{x-2}+3>8\cdot 2^{x-2}+1=2^{x+1}+1,$$

(3) jobb oldala nagyobb, mint a bal. Az 1. esetben tehát nem kapunk újabb megoldást.

2. eset: $k+1$ páros. Ekkor $2^{x-2} \mid k+1$, azaz van olyan c pozitív egész, hogy $k = c \cdot 2^{x-2} - 1$. Ezt (2)-be írva

$$2^{x-2}(1+2^{x+1}) = (c \cdot 2^{x-2} - 1)c \cdot 2^{x-2}, \quad \text{azaz}$$

$$1 + 2^{x+1} = c^2 \cdot 2^{x-2} - c. \tag{4}$$

Most is igaz, hogy $c \geq 1$ és páratlan, így az előzőhöz hasonló vizsgálatot végezhetünk.

Ha $c = 1$, akkor a (4) jobb oldala $2^{x-2} - 1$, kisebb, mint a bal oldal, ekkor nem kapunk megoldást.

Ha $c = 3$, akkor a (4) egyenlőség : $1 + 2^{x+1} = 9 \cdot 2^{x-2} - 3$. Rendezés után kapjuk, hogy $4 = 2^{x-2}$, azaz $x = 4$. Ekkor (1) bal oldala $1 + 2^4 + 2^9 = 23^2$, két megoldást kapunk: $y = -23$, $y = 23$.

Ha $c \geq 5$, akkor (4) jobb oldalát átalakítva

$$c^2 \cdot 2^{x-2} - c = 2^{x+1} + (c^2 - 8)2^{x-2} - c > 2^{x+1} + c^2 - 8 - c.$$

Ha $c \geq 5$, akkor $c^2 - 8 - c > 1$, tehát (4) jobb oldala nagyobb, mint a bal oldala, így több megoldást már nem kapunk.

A feladat feltételei tehát négy számpárra teljesülnek. Ezek: $(0;2)$, $(0;-2)$, $(4;23)$, $(4;-23)$.

5. *Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós, $n > 1$ fokú polinom, és legyen k egy pozitív egész. Tekintsük a $Q(x) = P\big(P\big(\ldots P\big(P(x)\big)\ldots\big)\big)$ polinomot, ahol P k-szor fordul elő. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb n darab olyan t egész szám van, amire $Q(t) = t$.*

Kis Gergely megoldása. Tegyük fel, hogy létezik olyan α_0 egész, amelyre $Q(\alpha_0) = P^{(k)}(\alpha_0) = \alpha_0$ és $P(\alpha_0) \neq \alpha_0$. Legyen $\alpha_{j+1} = P(\alpha_j)$ és jelölje i azt a legkisebb pozitív egészt, amelyre $\alpha_i = \alpha_0$. Nyilván $2 \leq i \leq k$. Ismeretes, hogy ha $P(x)$ egész együtthatós polinom, $a \neq b$ egészek, akkor $a - b \mid P(a) - P(b)$, így fennállnak az alábbi oszthatóságok:

$$\alpha_1 - \alpha_0 \mid P(\alpha_1) - P(\alpha_0) = \alpha_2 - \alpha_1 \mid \alpha_3 - \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_i - \alpha_{i-1} \mid \alpha_{i+1} - \alpha_i = \alpha_1 - \alpha_0.$$

Ha $x \neq y$ egészek és $y \neq 0$, akkor $|y| \geq |x|$. Így, mivel a fenti oszthatósági láncban szereplő első és utolsó különbség azonos, ezeknek a különbségeknek az abszolút értéke állandó. Jelölje ennek az állandónak az értékét φ ($\varphi \neq 0$).

Azt állítjuk, hogy $\alpha_{j+1} - \alpha_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ nem teljesülhet minden j-re. Ellenkező esetben ugyanis $\alpha_0 \pm i\varphi = \alpha_i = \alpha_0$ volna, vagyis $i\varphi = 0$, ami ellentmondás. Az α_j-k rendezése tehát nem monoton, van tehát olyan j, ahol megfordul, azaz $(\alpha_{j+1} - \alpha_j) = (-1)(\alpha_j - \alpha_{j-1})$. Erre a j-re így $\alpha_{j+1} = \alpha_{j-1}$ következik. Ekkor $P^{(i-j+1)}(\alpha_{j+1}) = P^{(i-j+1)}(\alpha_{j-1})$. Ez utóbbi egyenlőség pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_2 = \alpha_0$, tehát $i = 2$, azaz $P(\alpha_0) = \alpha_1$ és $P(\alpha_1) = \alpha_0$.

Legyenek ezután β_0 és β_1 olyan, az α_0, α_1 számok mindegyikétől különböző egészek, amelyekre ugyancsak teljesül, hogy $P(\beta_0) = \beta_1$ és $P(\beta_1) = \beta_0$. ($\beta_0 = \beta_1$ lehetséges.) Ekkor $\alpha_0 - \beta_0 \mid \alpha_1 - \beta_1 \mid \alpha_0 - \beta_0$ és $\alpha_0 - \beta_1 \mid \alpha_1 - \beta_0 \mid \alpha_0 - \beta_1$. Ebből következik, hogy

$$\alpha_0 - \beta_0 = \alpha_1 - \beta_1 \quad \text{vagy} \quad \alpha_0 - \beta_0 = \beta_1 - \alpha_1$$

és

$$\alpha_0 - \beta_1 = \alpha_1 - \beta_0 \quad \text{vagy} \quad \alpha_0 - \beta_1 = \beta_0 - \alpha_1.$$

Rendezés után a két részállítás második tagja ugyanazt mondja:

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \beta_0 + \beta_1, \tag{1}$$

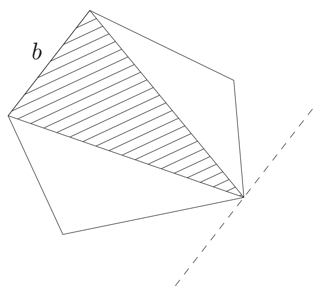
az első tagok pedig: $\alpha_0 - \alpha_1 = \beta_0 - \beta_1$, illetve $\alpha_0 - \alpha_1 = \beta_1 - \beta_0$ egyszerre nem teljesülhetnek, hiszen feltevésünk szerint $\alpha_0 - \alpha_1 \neq 0$. A két részállítás közül tehát legalább az egyikben a második tag teljesül, azaz (1) mindenképpen igaz, mégpedig attól függetlenül, hogy β_0 és β_1 egyenlők-e vagy sem.

I. Létezik olyan α_0 egész, amelyre $P(P(\alpha_0)) = \alpha_0$, de $P(\alpha_0) \neq \alpha_0$. Ekkor minden t egész számra, amelyre $Q(t) = t$, fennáll, hogy $P(t) + t = P(\alpha_0) + \alpha_0$. A $P(x) + x - P(\alpha_0) - \alpha_0$ polinom n-edfokú, ezért legfeljebb n ilyen t létezik.

II. Nincs ilyen α_0 egész. Ekkor minden olyan t egészre, amelyre $Q(t)=t$ fennáll, arra $P(t)=t$ is teljesül. Mivel a $P(x)-x$ polinom n-edfokú, legfeljebb n darab ilyen t létezhet. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

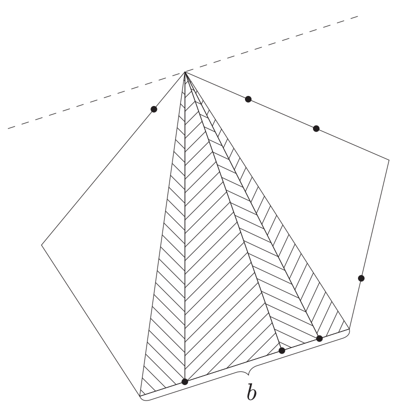
6. *Egy P konvex poligon mindegyik b oldalához hozzárendeljük a legnagyobb területű olyan háromszög területét, aminek egyik oldala b és ami benne van P-ben. Bizonyítsuk be, hogy a P oldalaihoz rendelt területek összege legalább a kétszerese P területének.*

Paulin Roland megoldása. A sokszög mindegyik b oldalához létezik a szóban forgó maximális területű háromszög: ennek b-vel szemközti csúcsa a b egyenesétől legtávolabbi csúcs P-ben (*3. ábra*). A megoldás során egy XYZ háromszög területét $[XYZ]$-vel, a P sokszög területét pedig $[P]$-vel jelöljük.

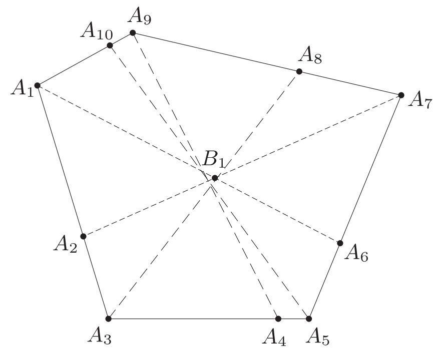


3. ábra

Első észrevételünk az, hogy ha egy sokszög szögei között a 180°-ot is megengedjük és az oldalakon újabb csúcsokat veszünk fel, akkor sem P területe, sem a P oldalaihoz rendelt területek összege nem változik (*4. ábra*). Ezért P minden csúcsából húzzuk meg azt a félegyenest, amely P területét felezi (folytonossági meggondolások miatt ilyen félegyenes minden csúcshoz létezik), és e félegyenesnek a P határával való másik metszéspontját vegyük fel a csúcsok közé. Így az $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$ sokszöget kapjuk, melynek területét az A_iA_{n+i} egyenes minden i-re felezi (*5. ábra*). (Az indexelés mod $2n$ ciklikus.)

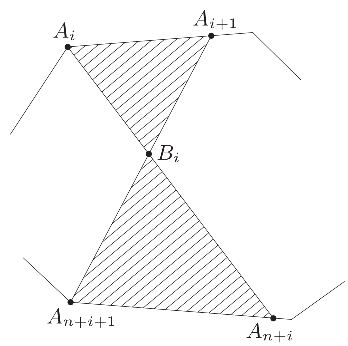


4. ábra



5. ábra

Az A_iA_{n+i} és $A_{i+1}A_{n+i+1}$ egyenesek tehát felezik a sokszög területét, így a P belsejében metszik egymást (*6. ábra*); jelölje a metszéspontjukat B_i ($1 \le i \le n$). Ekkor $[A_iA_{i+1}B_i] = [A_{n+i}A_{n+i+1}B_i]$, hiszen A_iA_{i+1} és $A_{n+i}A_{n+i+1}$ is felezi P területét. Legyen $t_i = [A_iA_{i+1}B_i]$; ekkor $t_i = t_{n+i}$ és $B_i = B_{n+i}$.



6. ábra

Azt állítjuk, hogy az $A_iA_{i+1}B_i$ háromszögek lefedik P-t, és így $\sum_{i=1}^{2n} t_i \ge [P]$. Ehhez vegyük észre, hogy adott i-re az $A_iA_{i+1}B_i$ és az $A_{n+i}A_{n+i+1}$ háromszögek belsejének egyesítése azon P-beli pontok halmaza, amelyek az A_iA_{n+i} és $A_{i+1}A_{n+i+1}$ félegyenesek ellentétes partján vannak. (Ha egy P-beli X pont nincs ezeken a félegyeneseken, akkor ez azt jelenti, hogy az $A_iA_{n+i}X$ és az $A_{i+1}A_{n+i+1}X$ háromszögek ellenkező körüljárásúak.) Tekintsük ezután a P egy tetszőleges belső X pontját, amelyik egyik A_iA_{i+1} félegyenesre sem illeszkedik. Ez a pont a fentiek értelmében az A_1A_{n+1} és az $A_{n+1}A_1$ fégyenesek ellentétes partján van, így az $A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, \ldots, A_nA_{2n}, A_{n+1}A_1$ félegyenesek sorozatában van két szomszédos, az A_iA_{n+i} és az $A_{i+1}A_{n+i+1}$, amelyeknek X szintén az ellentétes partján van. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy X benne van az $A_iA_{i+1}B_i$ és az $A_{n+i}A_{n+i+1}B_i$ háromszögek egyikében (*6. ábra*).

Legyen az A_iA_{i+1} oldalhoz tartozó maximális területű háromszög területe M_i. Mivel $[A_iA_{i+1}B_i] = [A_{n+i}A_{n+i+1}B_i]$, ezért $B_iA_i \cdot B_iA_{i+1} = B_iA_{n+i} \cdot B_iA_{n+i+1}$. Ekkor vagy $B_iA_i \le B_iA_{n+i}$ és $B_iA_{i+1} \ge B_iA_{n+i+1}$ vagy pedig $B_iA_i \ge B_iA_{n+i}$ és $B_iA_{i+1} \le B_iA_{n+i+1}$.

Az első esetben

$$\frac{[A_iA_{i+1}A_{n+i}]}{[A_iA_{i+1}B_i]} = \frac{A_iA_{n+i}}{A_iB_i} \ge 2, \text{ és így } M_i \ge [A_iA_{i+1}A_{n+i}] \ge 2t_i.$$

A második esetben hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{[A_iA_{i+1}A_{n+i+1}]}{[A_iA_{i+1}B_i]} = \frac{A_{i+1}A_{n+i+1}}{A_{i+1}B_i} \ge 2, \text{ és így ekkor is } M_i \ge [A_iA_{i+1}A_{n+i+1}] \ge 2t_i.$$

Mindenképpen igaz tehát, hogy $M_i \ge 2t_i$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összegezve kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{2n} M_i \ge 2\sum_{i=1}^{2n} t_i \ge 2[P]$, és ezt kellett bizonyítanunk.