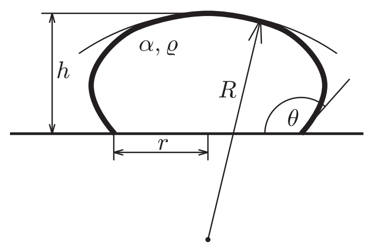
[1]

(Budapest, 2006. június 6–10.)

1. feladat (amely három független részből áll).

1/A. *Folyadékcsepp tömege* (*3 pont*)

Egy asztallapon folyadékcsepp „fekszik”. A folyadék felületi feszültsége α, sűrűsége ϱ. A csepp magassága h, legmagasabb pontjánál a felület görbületi sugara R. A csepp az asztallal r sugarú kör mentén érintkezik, és az „érintkezési szög” ϑ (*1. ábra*).

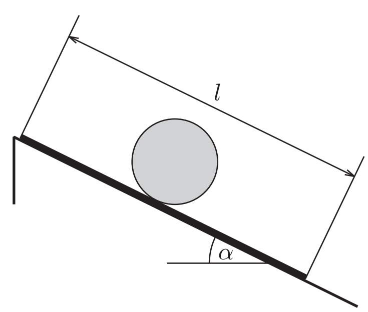


1. ábra

Mekkora a csepp tömege?

1/B. *Henger mozgása lejtőn* (*4 pont*)

$\alpha = 30°$-os hajlásszögű, hosszú lejtőn $l = 30$ cm hosszúságú, érdes felületű papírlap közepén tömör, homogén anyageloszlású henger fekszik (*2. ábra*). Az elengedést követően a papírlapot úgy húzzuk felfelé, hogy a henger tömegközéppontja mozdulatlan marad. (A henger a papírlapon nem csúszik meg.) A henger és a lejtő között a tapadási és a csúszási súrlódási együttható megegyezik, értéke $\mu = 0{,}3$.



2. ábra

Ábrázoljuk közös grafikonon a papírlap sebességét és a henger tömegközéppontjának sebességét az idő függvényében! A grafikonon numerikusan jelöljük be a jellemző idő- és sebesség-értékeket!

1/C. *Politrop folyamatok* (*3 pont*)

Bizonyos mennyiségű egyatomos ideális gáz nyomása az A jelű kezdőállapotban p_A, térfogata V_A. A gázzal a következő körfolyamatot végeztetjük:

$(A) \to (B)$: Összenyomjuk $V_B = V_A/4$ térfogatra úgy, hogy a nyomása nem változik meg.

$(B) \to (C)$: Politropikus állapotváltozással (vagyis amikor $pV^n =$ állandó, ahol n konstans) eljuttatjuk a $p_C = 8p_A$, $V_C = V_A/8$ állapotba.

$(C) \to (D)$: Izobár módon kitágítjuk $V_D = V_A/4$ térfogatra.

$(D) \to (A)$: Végül politrop módon visszajuttatjuk a kezdőállapotba.

a) Mekkora az egyes részfolyamatokhoz tartozó politrop kitevő?

b) Mekkora a gáz mólhője az egyes részfolyamatokban?

c) Melyik részfolyamatban történik hőfelvétel és melyikben ad le hőt a gáz?

2. feladat. *Űrszonda a Napba?* (*10 pont*)

Egy űrszondát a Merkur gravitációs terének (az ún. parittya-hatásának) kihasználásával szeretnénk a Napba (a Nap közvetlen közelébe) juttatni. A szondát a Föld közvetlen közelében rövid ideig működő rakétával gyorsítjuk fel

[1] A versenyen egy kísérleti és három elméleti feladat szerepelt; itt most – terjedelmi okokból – az elméleti problémákat ismertetjük.

a Föld felszínéhez képest v_0 nagyságú, a további mozgás szempontjából legalkalmasabb irányú sebességre. (Ezután további, hajtóművel történő pályamódosításra már nincs lehetőség, mert a rakéta minden üzemanyagát elhasználta.)

Az űrszonda „elhagyja" a Föld gravitációs terét, és bizonyos idő múlva eljut a Merkur közelébe. Itt a bolygó gravitációs terének hatására az űrszonda sebessége megváltozik, és a Merkur gravitációs terét elhagyva a Napba zuhanhat.

A szonda mozgásának elemzésekor felhasználhatjuk a következő közelítést: Amíg a szonda valamelyik égitest (a Föld, a Merkur stb.) közelében tartózkodik, elegendő csak annak az égitestnek a gravitációs hatásával számolni, a többi bolygó és a Nap gravitációs terétől eltekinthetünk. A bolygóktól „kellően" eltávolodott szondánál viszont a bolygók gravitációs terét figyelmen kívül hagyhatjuk, és a szonda mozgását egyedül a Nap gravitációs vonzóerejéből számíthatjuk.

Feltételezhetjük továbbá, hogy a szonda olyan ellipszispályán mozog, amely mind a Föld, mind pedig a Merkur pályáját *érinti.* A Föld és a Merkur pályáját azonos síkban fekvő körnek tekinthetjük, és az egyszerűség kedvéért a Föld forgástengelyének irányát vegyük erre a síkra merőlegesnek!

Adatok:

A Föld egyenlítői sugara: $R_F = 6380$ km.

A gravitációs állandó: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$.

A Föld tömege: $M_F = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

A Nap tömege: $M_N = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg.

A Föld közepes pályasugara: $r_F = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m.

A Merkur közepes pályasugara: $r_M = 5{,}79 \cdot 10^{10}$ m.

A Merkur keringési ideje: $T_M = 88$ (földi) nap.

a) A Föld mely pontjai a legkedvezőbbek az űrszonda indítására, és milyen földrajzi irányba célszerű indítani a rakétát?

b) Mekkora a szonda v_1 sebessége a Föld tömegközéppontjához képest a rakétahajtóművel történő gyorsítás végén? A választ a v_0 indítási sebesség és a többi adat segítségével adjuk meg!

c) A Földhöz képest mekkora v_2 sebességgel mozog a szonda, amikor elhagyja a Föld gravitációs terét? A választ a v_1 sebesség és a többi adat segítségével adjuk meg!

d) A Naphoz képest mekkora v_3 sebességgel mozog a szonda, amikor éppen elhagyta a Föld gravitációs terét? A választ a v_2 sebesség és a többi adat segítségével adjuk meg!

e) A Naphoz képest mekkora v_4 sebességgel mozog a szonda, amikor már viszonylag közel van a Merkur bolygóhoz, de az még nem befolyásolta jelentősen a szonda mozgását? A választ a feladat paramétereivel is és numerikusan is adjuk meg! Adjuk meg a szondának a Merkurhoz viszonyított Δv sebességét is numerikusan!

f) A szonda a Merkur gravitációs terében irányt változtat, és ha a Merkurhoz viszonyított sebessége elegendően nagy, akkor a bolygóval való „ütközése" után a Napba zuhanhat.

Teljesül-e ez a feltétel, azaz megvalósítható-e a program a leírt módon?

3. feladat. *Stern–Gerlach-kísérlet a klasszikus fizika szemszögéből* (*10 pont*)

Stern és *Gerlach* az atomok elektronoktól származó mágneses momentumát vizsgálta úgy, hogy atomokból álló részecskenyalábot lőtt inhomogén mágneses térbe, és a nyaláb eltérülését vizsgálta. A részecskenyaláb több, különböző szögben eltérülő, egymástól jól elkülöníthető nyalábra oszlott. Ez a kísérleti tény igazolta, hogy az atomban kötött elektronok impulzusmontuma, és így mágneses momentuma is kvantált. A kísérlet alkalmas az elektron saját mágneses momentumának, spinjének kimutatására, és a különböző spinbeállású elektronok szétválasztására is.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen mélységben érthető meg a jelenség pusztán klasszikus fogalmak felhasználásával! Az egyszerűség kedvéért tekintsünk szabad (nem atomban kötött) elektront. Az elektront tekintsük m tömegű, $-e$ töltésű, r sugarú, térfogatában egyenletesen töltött kis gömbnek, mely $\mathbf{v}$ sebességgel halad, és $\vec{\omega}$ szögsebességgel forog. Hozzunk létre a tér egy $0 < x < d$ tartományában inhomogén mágneses teret, melyet az elektronok pályája mentén a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} B_x(x,y,z) \\ B_y(x,y,z) \\ B_z(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha z \\ B_0 + \alpha y \end{bmatrix}, \qquad \text{ha} \qquad 0 < x < d$$

formula jellemez, és lőjük át ezen a térrészen a „klasszikus" elektront az x tengely mentén $\mathbf{v}$ sebességgel és $\vec{\omega}$ szögsebességgel, ahol

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\omega} = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}.$$

A megoldás során feltételezhetjük, hogy az elektronok szögeltérülése kicsiny, és alkalmazhatunk ennek megfelelő közelítéseket.

a) Milyen irányban és mekkora szöggel térülnének el az elektronok, ha nem forognának? Az eredményt fejezzük ki az elektron I impulzusával és töltésével, valamint a mágneses tér jellemzőivel!

b) Mekkora erő hat a forgó elektronnak a középpontjától $\boldsymbol{r}'$ vektorral megadott helyen levő, kicsiny ΔV térfogatú darabkájára?

c) Milyen irányban (melyik koordinátatengely mentén) válik szét a kétféle forgásirányú elektronokból álló nyaláb?

d) Határozzuk meg a pozitív, illetve negatív irányban forgó elektronok szétválásának szögét! Eredményünket fejezzük ki az elektron I impulzusával és N impulzusmomentumával, töltésével, valamint a mágneses tér jellemzőivel!