Legyen $S(x)=R(x)-P(x)$ és $T(x)=R(x)-Q(x)$. A feltétel szerint S és T legfeljebb harmadfokú, továbbá

$$S(u)=T(u)=0 \tag{1}$$

$$S(x)\ge 0;\quad T(x)\ge 0 \tag{2}$$

$$S(x)\ge T(x). \tag{3}$$

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $0\le\lambda\le 1$, amelyre $T(x)=\lambda\cdot S(x)$. Ebből átrendezéssel adódik az eredeti állítás.

Páratlan fokú polinomfüggvények értékkészlete az egész valós számegyenes, így (2) csak úgy teljesülhet, ha S és T vagy másodfokú, vagy konstans polinom.

Ha mindkettő másodfokú, (1) és (2) adja, hogy a két polinomnak pontosan egy gyöke van, így felírhatók $S(x)=a\cdot(x-u)^2$; $T(x)=b\cdot(x-u)^2$ alakban, ahol a és b pozitívak. (3) miatt $a\ge b$, így $\lambda=b/a$ megfelel.

Ha a két polinom közül csak az egyik másodfokú, a (2) és (3) szerint csak S lehet. Ekkor (1) miatt $T(x)\equiv 0$ és $\lambda=0$ megfelel.

Végül ha $T(x)\equiv S(x)\equiv 0$, a kívánt egyenlőség bármely λ-ra teljesül. Ezzel a feladat állítását is bizonyítottuk.

Szendrei György (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)