

Bevezetés

A membránok (vékony, hajlékony, elhanyagolható tömegű, megfeszített hártvány, pl. egy dob hártvája, vagy szappanhártya) rezgéseinek leírása már régóta foglalkoztatja a fizikusokat. Különösen a téglalap és kör alakú membránokat vizsgálták részletesen a szakirodalomban. A membránok és vékony lemezek rezgésének tanulmányozása több mint 200 évvel korábbra, egészen *Ernest Friedrich Florens Chladni* munkásságáig nyúlik vissza, aki különböző alakú lemezeken kialakuló csomóvonalakat tanulmányozott. Erről írt Cserti József a KöMaL 2004. évi áprilisi számában *A Chladni-féle porábráktól a nanofizikáig* címmel. A rugalmasságtan elméleti alapjainak kidolgozása után megnyugtatóan tisztázódtak a membránok, lemezek és a 3 dimenzióban kiterjedt rugalmas testek rezgéseit megadó elvi kérdések, bár még ma is igen nehéz feladat a rezgési mintázatok és a hozzájuk tartozó frekvenciák, az ún. *sajátfrekvenciák* megadása egy tetszőleges alakú membrán esetén.

Mint említettük, a kör alakú membrán rezgése megoldott probléma, ismertek a sajátfrekvenciái. Természetesen vetődhet fel a kérdés: hogyan változik meg egy dob (membrán) hangja, ha kilyukasztjuk közepén? Ezen kérdés megválaszolásához egy koncentrikusan lyukas membrán sajátrezgéseit vizsgáltuk, azzal a határfeltétellel, hogy a külső perem rögzített, míg a belső határvonal szabadon elmozdulhat. A dobok esetében a szabadon mozgó lyuk fizikailag úgy valószínűsíthető meg, hogy a hártvára nyújthatatlan, de könnyen hajló fonálból zárt hurkot erősítünk, majd a hártvának a hurkon belüli részét eltávolítjuk. Meglepő, hogy ezt a problémát (ezekkel a határfeltételekkel) mindeddig még nem vizsgálták, legalábbis nincs rá utalás a szakirodalomban.

Igen érdekes, hogy a fentebb kitűzött feladattal egy másik – az alkalmazások szempontjából talán jelentősebb – problémát is megoldunk. A mai félvezetőiparban már elő tudnak állítani néhány 100 nanométer méretű mintákat, amelyekben az elektronok mozgását kisméretű, *kétdimenziós* tartományokra lehet korlátozni. Ilyen kétdimenziós tartomány jön létre például GaAs és AlGaAs félvezető rétegek összeillesztésénél. Egy ilyen kisméretű síkbeli tartományban – esetünkben egy kilyukasztott körlapon – mozgó elektron leírása csak a kvantummechanika segítségével lehetséges. Az ilyen rendszerek viselkedésének megértése elengedhetetlen pl. a „nanotranzisztorok” létrehozásához.

A továbbiakban megpróbáljuk illusztrálni, hogy a fent említett két terület hogyan is kapcsolódik össze és miképpen valnak a membránok rezgéséről megszerzett ismereteink a kvantumfizikában is hasznosítható tudássá.

Membránok rezgései

Egy membrán $u(r, t)$ kitérés-idő függvényét egy bonyolult differenciálegyenlet írja le. Ha a problémának egy adott ω frekvenciájú, harmonikus rezgőmozgást leíró (ún. monokromatikus) megoldását keressük, akkor egy kicsit egyszerűbb egyenlethez, az ún. *Helmholtz-egyenlethez* jutunk. Ez az egyenlet határozza meg, hogy melyek a membrán lehetséges rezgési frekvenciái, mik a sajátfrekvenciái. Általában minden sajátfrekvenciához tartozik a membránnak egy jellegzetes „rezgési alakja”, ezt nevezük *sajátmódusnak*. Középiskolából is jól ismert, hogy egy egydimenziós rezgő rendszer, a mindkét végén rögzített húr sajátfrekvenciái egy bizonyos (a húr hosszától függő) alapfrekvenciáknak egész számú többszörösei. Téglalap vagy kör alakú membránnál ez már nem igaz, a sajátfrekvenciák bonyolultabb rend szerint követik egymást. Téglalap esetében zárt alakban megadható egy formula a sajátfrekvenciákra, de kör esetében már ez sem igaz.

Elvben tetszőleges alakú membránnak egyértelműen kiszámíthatók a sajátfrekvenciái és sajátmódusai, amennyiben megadjuk, hogy a membrán szélei rögzítettek vagy sem. Általában ez igen nehéz matematikai feladat, főleg ha a vizsgált rendszer nem rendelkezik semmilyen szimmetriával. Feltehető a fordított kérdés is: vajon *hallható-e* egy dob alakja, vagyis ha ismerjük a dob valamennyi sajátfrekvenciáját, meg tudjuk-e határozni ebből a dob alakját? Ezt a kérdést ilyen formában *Mark Kac* vetette fel 1966-ban, de a probléma sokkal régebbre nyúlik vissza, *Hermann Weyl*, a híres matematikus is foglalkozott vele 1911-ben. A kérdés egészen 1991-ig nyitott maradt, amikor találtak két olyan *különböző alakú* membránt, amelyek frekvenciaspektruma (sajátfrekvenciáinak rendszere) megegyezett.

Egy kör alakú membrán esetén elvileg egyértelműen meghatározottak a sajátfrekvenciák és a rezgési módusok. Ez igaz marad akkor is, ha a közepén lyukas membránt tekintjük. A sajátfrekvenciákat azonban – mindkét esetben – csak numerikus módszerek segítségével lehet kiszámolni. Jelöljük a lyuk sugarát R_1 -gyel, a membránét pedig R_2 -vel, és vezessük be a

$$(1) \quad \lambda = \frac{R_1}{R_2}$$

dimenziótlan paramétert! A *táblázatban* feltüntettük, hogy a lyuk sugarától függően hogyan változik a dob első sajátfrekvenciája ahhoz képest, mintha nem lenne lyuk rajta. A hátsó borítón pedig az eddig említett membránok első néhány sajátmódusát ábrázoltuk.

¹ Az alább bemutatásra kerülő cikk annak a tudományos diákköri dolgozatnak rövid kivonata, amelyet a szerző az ELTE TTK Komplex Rendszerek Fizikája Tanszékén készített, témavezetője *Cserti József* volt. *Hagyományos Imre*, az ELTE III. éves fizikus hallgatója a 2007. évi XXVIII. Országos Tudományos Diákköri Konferencián *I. díjat* nyert.

λ	0,1	0,2	0,3	0,5	0,9
$\Delta\omega/\omega$	0,01	0,07	0,15	0,49	5,67

Az alapprofundencia relatív megváltozása a lyuk sugarának néhány értékénél

Fizikailag érezzük, hogy minél nagyobb a lyuk sugara, annál nagyobbak a sajátfrekvenciák. A rendszer részletesebb analízisével kimutatható, hogy a sajátfrekvenciák a következőképpen függnek a lyuk méretétől:

$$(2) \quad \omega_n \sim \frac{1}{1 - \lambda},$$

vagyis a lyuk sugarát növelve a sajátfrekvenciák hiperbola ágak mentén tartanak a végtelenhez.

Alkalmazás a kvantummechanikában

Ma már egyértelműen bizonyítottnak tekinthető, hogy a mikrorészecskék hullámtermészettel rendelkeznek; ezt számos kísérleti tény támasztja alá. Egy kvantummechanikai rendszerről minden információt tartalmaz a rendszer $\Psi(\mathbf{r}, t)$ hullámfüggvénye. Egyetlen mikrorészecske esetén például a részecske megtalálási valószínűsége az \mathbf{r} pontban és t időpillanatban arányos a hullámfüggvény abszolút értékének négyzetével, $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ -tel. A $\Psi(\mathbf{r}, t)$ függvény kielégíti az ún. Schrödinger-egyenletet. Ez egy bonyolult, többváltozós függvényre vonatkozó differenciálegyenlet, amelynek – bizonyos határfeltételekhez tartozó – megoldása megadja a részecske hullámfüggvényét.

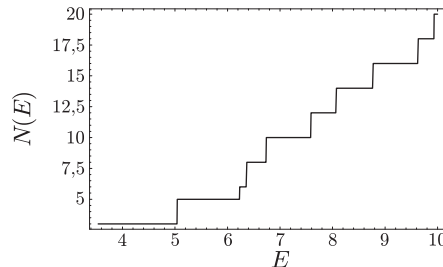
Már a kvantummechanika törvényeinek részletes ismerete előtt ismert volt a hidrogénatom vonalas színképe, ezt és a hidrogénatom állapotának további részleteit később a Schrödinger-egyenlet is nagy pontossággal igazolta. Az atomokban az elektronok csak bizonyos energiájú szinteken „tartózkodhatnak”, és általánosabban is igaz, hogy egy kötött állapotban levő részecske energiaszintjei a Schrödinger-egyenlet szerint diszkrét (egymástól élesen elkülönülő) spektrumot alkotnak. A membrán $u(\mathbf{r}, t)$ kitérésfüggvényét leíró egyenlet és egy szabad részecske $\Psi(\mathbf{r}, t)$ hullámfüggvényét meghatározó egyenlet egyaránt a Helmholtz-egyenlet (feltéve, hogy a membrán egy meghatározott sajátfrekvencián rezeg, illetve a részecske egy meghatározott energiájú állapotban, ún. sajátállapotban van). Belátható, hogy a membrán sajátfrekvenciáit megfeleltethetjük a részecske energiaszintjeinek az alábbi formula szerint:

$$(3) \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right),$$

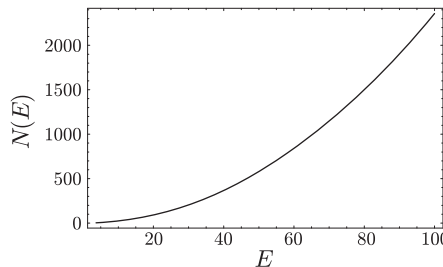
ahol $k_n = \frac{\omega_n}{c}$, ω_n a membrán n -edik sajátfrekvenciája, c pedig a hullám terjedési sebessége a membránban.

Egy igen kicsiny (atomi méretű) kétdimenziós tartományt, amelynek a faláról klasszikus fogalmaink szerint visszaverődik a részecske, kvantum-biliárdnak nevezünk. Jelen esetben a lyukas membrán sajátrezgése az atomi világban annak feleltethető meg, hogy egy mikrorészecske egy lyukas körlap alakú „biliárdasztalon” mozog. Azt állíthatjuk, hogy egy kilyukasztott kör alakú tartományba zárt részecske megengedett energiaszintjei megfeleltethetők a lyukas dob sajátfrekvenciáinak a (3) formulának megfelelően.

Még egy fogalmat érdemes megemlítenünk: az *energiaszintek állapotossűrűségét*. Jelölje $N(E)$ azon energiaszintek számát, amelyekre teljesül, hogy $E_n < E$. Ez a függvény ugrásszerűen változik, ún. *lépcsőfüggvény*, amint azt a kinagyított 1. ábra mutatja. Ha viszont $N \gg 1$ esetben az $N(E)$ függvény ábráját nagyítás nélkül vizsgáljuk, az összefüggés egy folytonos, sima függvényvel közelíthető (2. ábra).



1. ábra



2. ábra

A lépcsőfüggvény (pontosabban $N(E)$ kisimított változatának) növekedési ütemét (deriváltját) kiszámítva a

$$(4) \quad \varrho(E) = \frac{dN(E)}{dE}$$

állapotsűrűség nevű mennyiséget kapjuk. Első ránézésre egy kicsit mesterkéltnak tűnik ez a fogalom, de a kísérletek kiértékelése szempontjából ez az egyik legfontosabb fizikai mennyiség. Például egy zárt rendszerhez elektromos kontaktusokat csatlakoztatva és azokon feszültség- és áramerősség-méréseket végezve az eredmények kiértékelése annak ismeretében végezhető el, hogy tudjuk: a rendszer vezetőképessége arányos a rendszer állapotosságával. Ennek további részletezésére (például a lépcsőfüggvény alakja, szerkezete) itt nincs lehetőségünk, az érdeklődő Olvasó ezt megtalálhatja a hivatkozott diákköri dolgozatban.

Záró megjegyzésként még két dolgról kell szót ejtenünk. Az egyik valószínűleg az Olvasóban is felmerült: mi van akkor, ha nem középen van a membránon a lyuk? Ez az eset sokkal bonyolultabb a koncentrikus esetnél, de numerikusan ekkor is meghatározhatók a sajátfrekvenciák. Ez a rendszer azért különösen érdekes, mert a neki megfelelő biliárd a klasszikus fizika törvényei szerint kaotikus mozgáshoz vezet, míg a koncentrikus eset nem kaotikus mozgásokat eredményez. Miután a klasszikus fizikán belül jelentkező kaotikus jelenségeket az 1970-es években megértették, felmerült a kérdés, hogy ha egy rendszer klasszikusan kaotikus, akkor ez a tény hogyan nyilvánul meg (ha nyilvánul egyáltalán) a rendszer kvantumos megfelelőjében. Ez vezetett el a *kvantumkáosz* témakörének kutatásához. Ha egy rendszer kaotikus, az a klasszikus mechanikában azt jelenti, hogy a közeli kezdőhelyzetekből (kezdőállapotokból) indított részecskék pályája az idő múltával egymástól exponenciálisan távolodik. Kvantummechanikában nincs értelme egy biliárdban pattogó részecske pályájáról beszélni, ott a kaotikus viselkedés másképp jelentkezik. Bebizonyították, hogy egy mikrorendszerrel a kaotikus jelleg a rendszer energiszintjeinek spektrumából ismerhető fel. A dolgozatban beláttuk, hogy a koncentrikus elrendezés valóban nem kaotikus.

A dolgozatban elért eredmények kisebb módosítással átvihetők egy másik rendszerre, az ún. *mezoszkopikus gyűrűre*. Mágneses térbe helyezve a gyűrűt, állandósult áramokat figyeltek meg benne. A rendszer mágneses szuszceptibilitását mérték, melyet elméleti úton is meghatároztak, de az elméleti érték két nagyságrenddel (!) kisebb a mért értéknél. Ezt a furcsaságot a 90-es évek elején kezdték el vizsgálni, és azóta sem találtak kielégítő elméleti magyarázatot rá. A szuszceptibilitás függ a rendszer állapotosságától. Sejtésünk alapján az állapotosságban fellépő szingularitások (amikre itt nem tudunk kitérni) magyarázatot adhatnak a meglepő kísérleti eredményekre.