I. megoldás. Jelölje x a pohárban levő víz, h pedig a súlypont cm-ben mért magasságának mérőszámát. A víz fajsúlyát 1 pond/cm^3-nek véve, h-t a fizikában tanultak alapján a következőképpen írhatjuk fel:

$$h=\frac{20x\cdot\dfrac{x}{2}+200\cdot 4{,}8}{20x+200}\ \mathrm{cm}=\frac{x^2+96}{2(x+10)}\ \mathrm{cm}.$$

Feladatunk annak meghatározása, hogy mely $x\ge 0$ érték esetén lesz h a lehető legkisebb. A feladatot differenciálszámítás felhasználásával oldjuk meg. A $h=h(x)$ függvény x szerinti első deriváltja:

$$h'=\frac{2x(2x+20)-2(x^2+96)}{4(x+10)^2}=\frac{(x-4)(x+24)}{2(x+10)^2}.$$

Megállapíthatjuk, hogy a derivált függvény $0\le x<4$ esetén negatív, $x>4$ esetén pedig pozitív. A számláló képe ugyanis olyan felfelé nyíló parabola, amelynek zérushelyei -24 és 4, a nevező pedig $x\ge 0$ mellett mindig pozitív.

Ez azt jelenti, hogy a h függvény a $0\le x<4$ intervallumban szigorúan monoton fogyó, a $4<x<\infty$ intervallumban viszont szigorúan monoton növekedő. Ezért a $h=h(x)$ függvény a $0\le x<\infty$ intervallumbeli legkisebb értékét az $x=4$ helyen veszi fel. Tehát 4 cm-es vízmagasság esetén lesz a súlypont a legalacsonyabban.

A $h(x)$ legkisebb értéke szintén 4-nek adódik, vagyis a súlypont éppen a víz felszínére esik, amikor a legalacsonyabban van.

Hajnal Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A $h=h(x)$ függvény minimumhelyét többféle módon meghatározhatjuk differenciálszámítás alkalmazása nélkül is: pl. a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján, vagy a másodfokú egyenlet diszkriminánsával való okoskodással. Ezeknek a matematikai módszereknek alkalmazása során lényegtelen, hogy mi a vizsgált függvény konkrét fizikai jelentése. Jelen feladatunkra viszont egy olyan megoldást is adhatunk, amely szorosan a feladat fizikai tartalmához kapcsolódik.

Az I. megoldásból ismert eredményben figyelemre méltó, hogy a súlypont a víz felszínére esik, amikor a legalacsonyabban van. Nos, ez nem véletlen. Ugyanis mindaddig, amíg a vizet a súlypont alá töltjük, a súlypont magassága állandóan csökken, mihelyt azonban a súlypont találkozik a víz felszínével, az újabb vízmennyiség a súlypontot emelni fogja, de persze úgy, hogy a súlypont a víz felszíne alatt marad. Ennek alapján a keresett vízmagasság egyszerűen az

$$\frac{x^2+96}{2(x+10)}=x$$

egyenletből számítható ki az $x\ge 0$ feltétel mellett.

Tóth Viktor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A pohár falvastagságát alul elhanyagoltuk. Eredményünk vastag falú pohár esetén is helyes, ha a súlypont magasságát a pohár aljának belső felületétől mérjük.