B. 3849. *Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg legalább egyszer kapunk fejet is és írást is. Mennyi a dobások számának a várható értéke?*

*

A feladatra két megoldást közöltünk áprilisi számunk 221–222. oldalán. Mindkét dolgozat – természetesen – maximális pontszámot kapott, de úgy éreztük, vissza kell térnünk rájuk. A szerzők eljutottak a helyes eredményhez, a második megoldás heurisztikusan is világossá tette, amit az első kiszámolt. Maga a számolás igen látványos, érdemes egy újabb példán szemügyre venni, hogyan működik.

Tegyük fel, hogy valaki ezúttal az

$$M=1+\frac{5}{2}+\frac{21}{4}+\frac{85}{8}+\frac{341}{16}+\dots$$

végtelen összeget akarja „kiszámolni”. Számérzéke nincs, becsülgetni vagy kísérletezni nem akar, az első megoldás módszere viszont nagyon tetszik neki. Lelkesen munkához lát:

$$M=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots\right)+\left(\frac{4}{2}+\frac{20}{4}+\frac{84}{8}+\frac{340}{16}+\dots\right).$$

A közölt megoldásból tudja, hogy az első összeg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$ (ezt egyébként is tudta). A második összeg minden tagjában egyszerűsít 2-vel, majd kiemel 2-t:

$$2+\frac{10}{2}+\frac{42}{4}+\frac{170}{8}+\dots=2\left(1+\frac{5}{2}+\frac{21}{4}+\frac{85}{8}+\dots\right),$$

éppen a keresett összeg kétszerese. A közölt megoldás módszere most is alkalmazható:

$$M=2+2M\quad \text{és így}\quad M=-2\ !$$

Az eredmény enyhén szólva gyanús, pedig nem történt más, mint a megoldásban. Hol a hiba?

Talán ott, mondhatná valaki, hogy nem írtam le az összeg általános tagját; lehet, hogy a talált kapcsolat csak korlátozottan érvényes, később „elromlik”. Megnyugtatásul: itt minden rendben van, az összeg tagjainak nevezői a kettő növekvő hatványai, az egyes számlálók pedig az előző számláló négyszeresénél eggyel nagyobbak: a következő tag tehát $\dfrac{4\cdot 341+1}{32}$. Ha ezt a nevező reciprokával csökkentjük és egyszerűsítünk 2-vel, akkor az előző tag duplája, $\dfrac{2\cdot 341+1}{16}$ marad, és nyilván nincs akadálya a hasonló folytatásnak.

Ezután némi joggal vetődik föl a kérdés: mit számolt ki tulajdonképpen a közölt megoldás? Mielőtt erre válaszolnánk, nézzünk egy újabb példát.

Jól ismert az alábbi különös okoskodás: az $x\to x^2$ „eljárás” minden 1-től különböző pozitív egészhez egy nagyobb pozitív egész számot állít elő. Másképpen szólva az 1 az egyetlen pozitív egész, amelyik – módszerünkkel – nem növelhető. Következik-e ebből, hogy az 1 a legnagyobb pozitív egész? Nem. Miért nem? Mondjuk azért, mert tudjuk – elég ránézni – hogy az 1 nem a legnagyobb pozitív egész. Ennél persze többet tudunk: azt, hogy nincsen legnagyobb pozitív egész szám. Következik-e a fenti számolásból, hogy az M összeg értéke -2? Nem. Miért nem? Mondjuk azért, mert tudjuk – elég ránézni – hogy az összeg nem -2. Következik-e az első megoldás számolásából, hogy az az összeg 3? Igen? Miért igen? Mondjuk azért, mert tudjuk… . Mit is kellene tudnunk?

Vegyük ismét szemügyre a „legnagyobb pozitív egészről” szóló fenti okoskodást. Hibás? Ahogy vesszük. Annak bizonyításaként, hogy az 1 a legnagyobb pozitív egész, feltétlenül az. Kifogástalanul bizonyítja viszont az alábbi, első ránézésre talán különös, de matematikai szempontból teljesen korrekt – sőt, igaz – állítást: „Ha a pozitív egész számok között **van** legnagyobb, akkor ez az 1”. (Az más lapra tartozik, hogy a logika szabályai szerint ez az összetett állítás mindenképpen igaz, hiszen az előtagja hamis. Mi most egy másik bizonyítást adtunk erre.)

A közölt megoldás, illetve az ugyanígy okoskodó, de elfogadhatatlan eredménnyel végződő számolás során is ilyesféle helyzetben vagyunk. Igaz ugyanis a következő: ha **tudjuk,** hogy a végtelen összeg egy jól meghatározott értelemben **létezik,** akkor a megoldás módszere ki is számolja. Pusztán abból viszont, hogy az eljárás akadálytalanul „lefut” és eredményt ad, nem következik, hogy a szóban forgó összeg létezik. Erre a tudásra az eljárástól független módon kell szert tennünk.

Ilyenformán a közölt megoldás „csak” feltételes módban állja meg a helyét; vagy azzal a kezdőmondattal, hogy „Amennyiben a várható érték létezik…”, vagy pedig egy hivatkozással a végtelen sorok elméletéből ismert valamelyik elégséges feltételre, amely biztosítja, hogy a sornak létezik összege. Szigorúan véve ezek után még arra is hivatkozni kellett volna, hogy ekkor a „módszer” lépései is jogosak, a végtelen tagú összeg ugyanúgy kezelhető, mint a véges, azaz például a tetszőlegesen átrendezhető.

Középiskolásként az ember ritkán szembesül az effajta hibával. A tanult eljárások – egyenletmegoldás, geometriai szerkesztések – gyakorlásakor többnyire magától értetődőnek szokás tekinteni, hogy az előállítandó objektum létezik.

Előfordul ugyan, hogy egy egyenletnek nincsen megoldása, illetve miután behelyettesítéssel rátalálunk egy gyökre, más, többnyire függvényvizsgálati módszerekkel tisztázható, hogy több megoldás *nem létezik*, a legtöbb diák szemében a másodfokú egyenlet megoldóképletének a működése testesíti meg az elvárható viselkedést: ha van megoldás, azt a megoldóképlet elő is állítja, ha pedig a megoldóképlet „fejreáll”, akkor megoldás sem létezik. A geometriai szerkesztéseknél nem a „rettegett” diszkusszióra gondolok; az „csak” annyit jelent, hogy – elvben – minden lehetséges bemenő adatra meg kell vizsgálni a talált szerkesztés működését; valahogy úgy, ahogy – elvben – egy számítógépes programot szokás tesztelni. A szakemberek szerint a forgalomban lévő programcsomagok tele vannak hibával; az általunk közölt megoldásokban mi magunk sem érvényesítjük ezt az elvet – vagy legalábbis általában nem és semmiképpen sem maradéktalanul. Van viszont egy másik, lényegesebb szempont, amelyet nagyon ritkán szoktak fölvetni: hogy létezik-e a megszerkesztendő háromszög, négyszög vagy bármilyen geometriai objektum. Szigorúan véve azt is be kell bizonyítani, hogy az eljárás tényleg azt állítja elő, amit a feladat megkövetel; az ilyesmi pedig – mint a fenti példa mutatja – nem feltétlenül azon múlik, hogy az eljárás végigvihető-e, és gyakran annak eldöntésébe torkollik, *létezik-e,* amit keresünk.

*

Ami a második megoldást illeti, ott ilyen kérdés föl sem merül. A megoldás szerencsésen aknázza ki, hogy a *geometriai eloszlás* várható értékének rendkívül szemléletes jelentése van és ennek a révén közvetlenül adódik a végeredmény. Ebben a megközelítésben fölösleges firtatni, hogy van-e várható érték: az magától értetődően létezik éspedig a megfelelő tulajdonságokkal. Hogy ez mennyiben tekinthető bizonyításnak? Annyiban talán, ahogyan az az érv, hogy *ha egy test sebessége nulla, akkor a test áll* „bizonyítja”, hogy *ha egy intervallumon egy függvény deriváltja nulla, akkor a függvény az intervallumon konstans.* Nyilván van, aki az állítás első formáját érti, a másodikat pedig nem, ugyanúgy, mint azok, akik szemében az érmés feladatra adott második megoldás a józan ész alapján világos és áttekinthető, szemben az első nehézkes számolásával. Mint ahogyan a fizika nyelvén magától értetődő állítás sem elsősorban a megfelelő matematikai tétel bizonyítását adja, hanem azt szemlélteti, hogy az analízis fogalmi keretei jó modellül szolgálhatnak a fizika számára, itt ugyanis bizonyítható tételként jelenik meg a tapasztalati tény, a feladat két megoldása együtt és a szükséges kiegészítésekkel arról – is – szól, hogy a várható érték matematikai fogalma szerencsésen ragadja meg azt, amit a szemlélet alapján elvárhatunk.