

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletet: $(x - \sqrt{x-2} - 2)(x - \sqrt{x-3} - 3) = 0$. (11 pont)

2. Adott az $f:]-1; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |(x-2)^2 - 4| - 4$ függvény.

a) Adjuk meg a koordináta-rendszerben azon rácsponthelyeket, amelyek illeszkednek a függvény grafikonjára.

b) Adjuk meg a függvény zérushelyeit.

c) Mely intervallumokon növekedő a függvény? (12 pont)

3. A koordináta-rendszerben adott két pont: $A(1; 5)$ és $B(7; 7)$. Adjuk meg az x tengely azon P pontjának koordinátáit, amelyre

a) $AP = BP$;

b) $AP^2 + BP^2 = 94$.

c) $AP + BP$ minimális; (14 pont)

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} 2^{3x+2} &= 4y^3 - 407y + 20 \\ x &= \log_2(y - 4). \end{aligned} \right\} \quad (14 \text{ pont})$$

II. rész

5. Egy mértani sorozat első eleme a , a hányadosa q . Mennyi annak a mértani sorozatnak az első eleme, amelynek a hányadosa q^2 , az első 25 elem összege pedig az adott sorozat első 50 elemének összegével egyenlő? (16 pont)

6. Egy érettségiző osztály a tablóját középpontosan szimmetrikus nyolcszög alakúra tervezte. A nyolcszöget egy $1 \text{ m} \times 1,4 \text{ m}$ -es téglalap alakú lemezből szerették volna elkészíteni úgy, hogy a téglalap sarkainál négy egybevágó derékszögű háromszöget levágnak. Ekkor természetesen a téglalap négy oldalegyenese a nyolcszögnek is oldalegyenese lesz. Az így kapott nyolcszög oldalai deciméterben mérve sorban: 7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 5. Mennyivel változna a hulladék mennyisége, ha ezt a nyolcszöget a másik négy oldalegyenese által meghatározott téglalaphoz vágatták volna ki? (16 pont)

7. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív x értéket, amelyre $\sin x$ és $\sin 2x$ egy derékszögű háromszög befogói, $\sin 3x$ pedig az átfogója. (16 pont)

8. Egy áruház szeretné megajándékozni azokat, akik az akciós májkonzervből legalább hetet vásárolnak. Az áruházban a konzervdobozokat négyzet alapú gúlába tornyozták. Például egy négy rétegű gúlát $16 + 9 + 4 + 1$ darab dobozból lehet elkészíteni. A vásárlók egy szerencsekerék megforgatásával 1-től 50-ig egyenlő eséllyel sorsolhatnak egy egész számot. Ha az ennyi rétegből felépíthető gúlában a konzervdobozok száma osztható 7-tel, akkor az illető ajándékot kap.

a) Az áruház dolgozói egy 16 rétegű gúlát építettek. Hány dobozt használtak fel?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ajándékra jogosító számot pörgetünk?

c) Az egyik vásárló olyan számot forgatott, hogy az ennyi rétegű gúlában a dobozok száma 7-tel és 13-mal is osztható volt. Melyik szám lehetett ez? (16 pont)

9. Mennyi annak a forgástestnek a térfogata, amely az $f: [-10; 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0,004x(x+12)(x-12) + 8$ harmadfokú függvény képének az x tengely körüli megforgatásával jön létre? (16 pont)