[1]

Első nap

1. feladat. Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I. A háromszög P belső pontja kielégíti a

$$PBA\sphericalangle + PCA\sphericalangle = PBC\sphericalangle + PCB\sphericalangle$$

egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $AP \geq AI$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $P = I$.

2. feladat. Legyen P egy szabályos 2006-szög. P egy átlóját *jónak* nevezzük, ha a végpontjai P határát két olyan részre bontják, amelyek mindegyike P páratlan sok oldalát tartalmazza. Az oldalakat szintén *jónak* nevezzük.

Tegyük fel, hogy P-t háromszögekre bontottuk 2003 olyan átlóval, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja P belsejében. Határozzuk meg az ilyen felbontásokban előforduló egyenlőszárú, két jó oldallal rendelkező háromszögek számának maximumát.

3. feladat. Határozzuk meg a legkisebb olyan M valós számot, amire az

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

egyenlőtlenség teljesül minden a, b, c valós számra.

Második nap

4. feladat. Határozzuk meg az összes olyan, egész számból álló (x, y) számpárt, amire teljesül

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

5. feladat. Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós, $n > 1$ fokú polinom, és legyen k egy pozitív egész. Tekintsük a $Q(x) = P\Big(P\big(\ldots P\big(P(x)\big)\ldots\big)\Big)$ polinomot, ahol P k-szor fordul elő. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb n darab olyan t egész szám van, amire $Q(t) = t$.

6. feladat. Egy P konvex poligon mindegyik b oldalához hozzárendeljük a legnagyobb területű olyan háromszög területét, aminek egyik oldala b és ami benne van P-ben. Bizonyítsuk be, hogy a P oldalaihoz rendelt területek összege legalább a kétszerese P területének.

[1] Az olimpia honlapja: `http://imo2006.dmfa.si/`.