I. rész

1. *Két konvex sokszög belső szögösszegének különbsége megegyezik egy hétszög belső szögösszegével, és egyiküknek kétszer annyi csúcsa van, mint ahány oldala a másiknak. Hány átlójuk van összesen?*

Megoldás. A két sokszög csúcsainak száma legyen n és m. Ekkor a belső szögeik összege $(n-2)\cdot 180°$, illetve $(m-2)\cdot 180°$. Ezek különbsége egy hétszög belső szögösszegével egyezik meg, azaz $(n-m)\cdot 180° = (7-2)\cdot 180°$, ahonnan az $n-m=5$ összefüggést kapjuk. Tudjuk, hogy az egyiknek kétszer annyi csúcsa van, mint ahány oldala a másiknak, de egy sokszögnek ugyanannyi csúcsa van, mint oldala, ezért $2m=n$. Az egyenletrendszerből kapjuk: $n=10$ és $m=5$.

Az átlók száma: $\dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{10(10-3)}{2} = 35$, illetve $\dfrac{m(m-3)}{2} = \dfrac{5(5-3)}{2} = 5$. Vagyis összesen 40 átlójuk van.

2. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív egész számpárok halmazán:*

$$x^{y^2-15y+56} = 1,$$
$$y - x = 5.$$

Megoldás. Az első egyenlet teljesüléséhez vagy az $y^2-15y+56$-nak kell 0-nak lennie, amiből az $y^2-15y+56=(y-7)(y-8)$ miatt $y=8$ vagy $y=7$; vagy az x-nek kell 1-nek lennie. A második egyenlettel összevetve az eredményeket három számpár elégíti ki az egyenletrendszert: $(3;8)$, $(2;7)$, $(1;6)$.

3. *A* $k^2(2+4x)-x(x+1+k)+3(x-2)(2k+1)-(1-x)(k+3)=0$ *egyenlet gyökei* $x_1=1$ *és* $x_2=2$. *Adjuk meg* k *értékét.*

Megoldás. Ha $x_1=1$, akkor ezt az egyenletbe helyettesítve 0-t kell kapnunk:

$$k^2(2+4)-(1+1+k)+3(1-2)(2k+1)-(1-1)(k+3)=0,$$

rendezve: $6k^2-7k-5=0$, ennek megoldásai: $k_1=\dfrac{5}{3}$, $k_2=-\dfrac{1}{2}$.

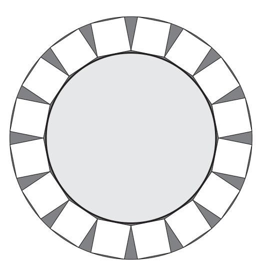
Hasonlóan, ha $x_2=2$, akkor

$$k^2(2+8)-2(2+1+k)+3(2-2)(2k+1)-(1-2)(k+3)=0,$$

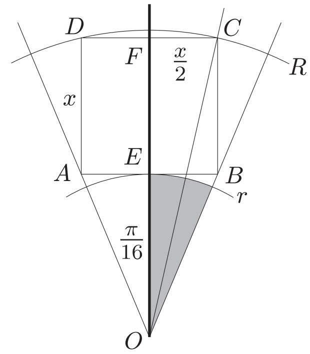
rendezve: $10k^2-k-3=0$, ennek megoldásai: $k_1=\dfrac{3}{5}$, $k_2=-\dfrac{1}{2}$.

Mivel mind a két feltételnek teljesülnie kell, azért $k=-\dfrac{1}{2}$.

4. *Egy teázóban úgy szolgálják fel a teát, hogy a csésze* 16 db *kockacukorral az* ábrán *látható módon körberakható (a szomszédos kockacukrok csúcsai összeérnek, egy-egy oldalukkal érintik a csészét, két-két csúcsuk pedig a csészealj peremén van). Hány* cm *a kockacukor éle, illetve a csésze sugara, ha a csészealj átmérője* 10 cm?



Megoldás. Egy kockacukorhoz $\dfrac{2\pi}{16}$ nagyságú középponti szög tartozik. Ezt megfelezve és az OC sugarat berajzolva az AOE derékszögű háromszögben $r=\dfrac{x}{2}\cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$, az OCF derékszögű háromszögben pedig $R^2=(x+r)^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.



Ebben az egyenletben $R = 5$ és $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{16}\right) \approx 5$ alapján $r \approx \frac{5}{2}x$. A következő „egyenletet” kapjuk:

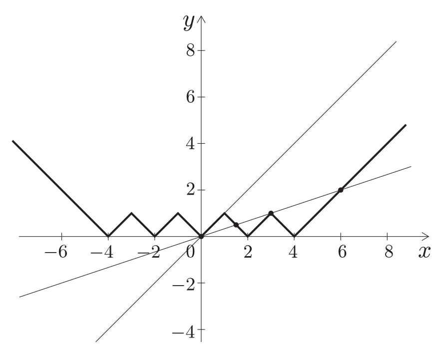
$$25 \approx \left(x + \frac{5}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

ahonnan $x \approx \sqrt{2}$, azaz a kockacukor éle kb. 1,4 cm, a csésze átmérője kb. 7 cm.

II. rész

5. *Hány megoldása van az* $\Big|\Big|\big||x| - 1\big| - 1\Big| - 1\Big| - 1\Big| = \frac{kx}{7}$ *egyenletnek a pozitív egész* k *értékétől függően?*

Megoldás. Készítsünk vázlatrajzot az $f(x) = \Big|\Big|\big||x| - 1\big| - 1\Big| - 1\Big| - 1\Big|$ függvényről:



Az $f(x)$ függvénynek az 1 meredekségű egyenessel végtelen sok közös pontja, az $\frac{1}{3}$ meredekségű egyenessel 4 közös pontja van, és ezek a „választóvonalak”.

Ha $k > 7$, akkor egy, ha $k = 7$, akkor végtelen sok, ha $k \in \{6; 5; 4; 3\}$, akkor három, és ha $k \in \{2; 1\}$, akkor öt megoldása van az egyenletnek.

6. *Adott a* 10 *egység oldalú* $ABCD$ *rombusz. Az* A *középpontú,* C *csúcson áthaladó kört belülről érinti a* B *középpontú,* D *csúcson áthaladó kör. Határozzuk meg a rombusz területét.*

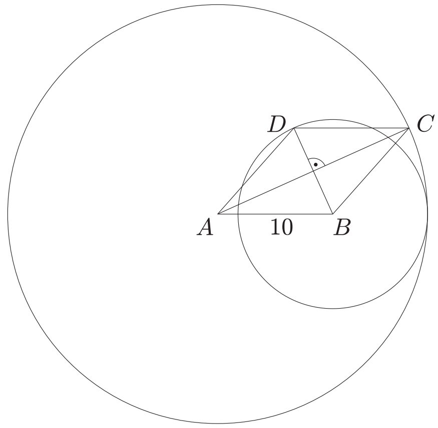
Megoldás. Legyen a nagyobbik kör sugara, ami egyben a hosszabbik átló a rombuszban R, és a kisebbik kör sugara, amely a rövidebbik átló, r. Mivel a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, a Pitagorasz-tétel alapján:

$$\frac{R^2}{4} + \frac{r^2}{4} = 100.$$

Mivel pedig a két kör érinti egymást: $R - r = 10$. A két összefüggésből a

$$2r^2 + 20r - 300 = 0$$

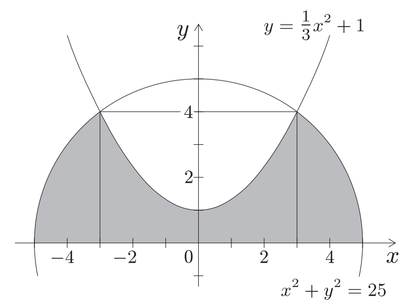
másodfokú egyenletet kapjuk, melynek pozitív gyöke $r = 5\sqrt{7} - 5$, amiből $R = 5\sqrt{7} + 5$.



A rombusz területe:

$$t = \frac{Rr}{2} = \frac{\left(5\sqrt{7}-5\right)\left(5\sqrt{7}+5\right)}{2} = 75.$$

7. *Az $x^2+y^2=25$ egyenletű kör, az $y=\frac{1}{3}x^2+1$ egyenletű parabola és az abszcisszatengely egy síkidomot határoznak meg, amelyet megforgatunk az abszcisszatengely körül. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?*



Megoldás. Határozzuk meg a parabola és a kör metszéspontjainak koordinátáit. A két egyenletből a metszéspontok: $A(-3;4)$ és $B(3;4)$. A keletkezett forgástest térfogata:

$$V = 2\pi\left[\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2+1\right)^2 dx + \int_3^5 (25-x^2)\,dx\right] =$$

$$= 2\pi\left[\int_0^3 \left(\frac{x^4}{9}+\frac{2x^2}{3}+1\right) dx + \int_3^5 (25-x^2)\,dx\right] =$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^5}{45}+\frac{2x^3}{9}+x\right]_0^3 + 2\pi\left[25x-\frac{x^3}{3}\right]_3^5 = \frac{144}{5}\pi + \frac{104}{3}\pi = \frac{952}{15}\pi \approx 199{,}4.$$

8. *Egy cég golyó alakú, tömör rágógumit gyártott, és darabját 10 forintért adta el. Az alapanyagok drágulása miatt az előállítási költség 300%-kal növekedett. A gyártó szeretné, ha a rágógumik eladása utáni nyereség és az előállítási költség aránya nem változna, ezért a rágógumi darabárát 20 forintra emelte. A terméket is átalakították: a 2 cm átmérőjű gömb alakú rágógumik belseje egy koncentrikus gömb alakú üreget is tartalmaz. Számoljuk ki az új rágógumi falának vastagságát.*

Megoldás. Legyen a régi fajta rágógumi előállítási költsége x Ft, és legyen az új és a régi rágógumi mennyiségének (tömegének) aránya y $(x, y \neq 0)$. Ekkor a következő táblázatot készíthetjük:

	Régi fajta	Új fajta
Az előállítás költsége (Ft)	x	$4xy$
Az eladási ár (Ft)	10	20
Nyereség darabonként (Ft)	$10-x$	$20-4xy$
Arány	$\frac{10-x}{x}$	$\frac{20-4xy}{4xy}$

Mivel az előállítás után a nyereség/költség arány nem változott, azért:

$$\frac{10-x}{x}=\frac{20-4xy}{4xy}, \quad \text{ahonnan} \quad y=\frac{1}{2}.$$

Az új rágógumi anyagfelhasználása fele a régiének, a belsejében lévő üres gömb sugara $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Így a rágógumi falának vastagsága $1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx 0{,}2$ cm.

9. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:*

a)
$$\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{x-5}-1=7x-x^2-2xy, \\ \log_5 64^x\cdot\log_4 125^y=45. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} xy+y=2, \\ (1-y)\cdot 2\cos\dfrac{x\cdot\pi}{3}=\dfrac{x-1}{x+1}. \end{cases}$$

Megoldás. *a*) A feladatban $x\ge 5$-nek teljesülni kell. A második egyenlet bal oldalát átalakítva:

$$\log_5 64^x\cdot\log_4 125^y=\log_5 4^{3x}\cdot\log_4 5^{3y}=3x\cdot\log_5 4\cdot 3y\cdot\log_4 5=9xy\cdot\underbrace{\log_5 4\cdot\log_4 5}_{1}=9xy,$$

ahonnan $xy=5$.

Az első egyenletbe behelyettesítve:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{x-5}-1=7x-x^2-10=(x-5)(2-x).$$

A kikötések miatt $x\ge 5$. A bal oldal szigorúan monoton nő, nem negatív és csak $x=5$-nél egyenlő 0-val.

A jobb oldal $x\ge 5$ esetén nem pozitív, és $x=5$ esetén 0. Így csak az $x=5$ megoldás. Az egyenletrendszer megoldása: $(5;1)$.

b) Az $x=-1$ jól láthatóan nem megoldás.

Ha $x\ne -1$, akkor az első egyenletből: $y=\dfrac{2}{x+1}$. A második egyenletbe beírva:

$$\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\cdot 2\cos\frac{x\cdot\pi}{3}=\frac{x-1}{x+1}.$$

A bal oldalt tovább alakítva:

$$\left(\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}\right)\cdot 2\cos\frac{x\cdot\pi}{3}=2\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\cos\frac{x\cdot\pi}{3}.$$

A $2\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\cos\dfrac{x\cdot\pi}{3}-\dfrac{x-1}{x+1}=0$ egyenletet kell megoldanunk. Szorzattá alakítva: $\dfrac{x-1}{x+1}\left(2\cos\dfrac{x\cdot\pi}{3}-1\right)=0$. Innen kapjuk, hogy $x=1$, illetve $\cos\dfrac{x\cdot\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.

Mivel

$$\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\cos\pi\left(\frac{1+6k}{3}\right), \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{2}=\cos\left(\frac{5\pi}{3}+2l\pi\right)=\cos\pi\left(\frac{5+6l}{3}\right),$$

ezért a két megoldáscsoport $x=6k+1$, illetve $x=6l+5$, ahol $k,l\in Z$, és ebben az $x=1$ is benne van.

A megoldások: $\left(6k+1;\dfrac{1}{3k+1}\right)$, ahol $k\in\mathbb{Z}$, illetve $\left(6l+5;\dfrac{1}{3l+3}\right)$, ahol $l\in\mathbb{Z}$.