Az első egyenlet, amellyel a koordináta-geometriában találkozunk, az egyenes egyenlete: $ax + by = c$. Ennek segítségével határozhatjuk meg például két egyenes metszéspontjának a koordinátáit: ha az egyenesek egyenlete $a_1x + b_1y = c_1$, illetve $a_2x + b_2y = c_2$, akkor a metszéspont koordinátái azok az x, y számok, amelyek mind a két egyenletet kielégítik, vagyis az x, y számpár az

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

lineáris egyenletrendszer megoldása.

Az $ax = b$ egyenletek analógiájára érdemes az (x, y) párt egyetlen objektumnak tekinteni: így az egyenletrendszer bal oldala kiszámolja az ismeretlen (x, y) párhoz a (c_1, c_2) számpárt. A feladat a megadott (c_1, c_2) eredményhez tartozó pár megkeresése. Vizsgáljuk meg ezt a hozzárendelést.

Az egyismeretlenes elsőfokú egyenlet mintájára vezessük be a következő jelölést: $A\underline{x} = \underline{c}$, ahol $\underline{c}$ az adott (c_1, c_2) számpárt, $\underline{x}$ pedig a keresett (x, y) számpárt jelenti, mindkettőt „függőleges”, oszlopszerű elrendezésben fölírva: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Az A pedig az egyenletek bal oldalán álló együtthatók téglalap-szerű elrendezésben: $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

Vegyük észre, hogy ezzel nem csupán egy jelölést vezettünk be, amelynek révén számok bizonyos rendszereit *mátrixokkal* (esetünkben A, $\underline{c}$, $\underline{x}$) ábrázoljuk, hanem – ezek egymás mellé írásával – egy műveletet is, amely a két sorból és két oszlopból álló (röviden: 2×2-es) $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ és az egyetlen oszlopból álló $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *oszlopmátrixokból* kiszámolja a $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix}$ oszlopmátrixot.

Nem kell innen túl messzire mennünk ahhoz, hogy további jelenségekre bukkanjunk, amelyek ugyancsak a fenti művelettel írhatók le. Tekintsük ehhez a sík különféle transzformációit: elforgatásokat, tükrözéseket, vetítéseket. Pontok helyett azonban vektorokra alkalmazzuk e transzformációkat, azaz rögzítsünk egy O origót, és a sík egy tetszőleges P pontjára tekintsük az $\overrightarrow{OP}$ vektort. Tudjuk, hogy a $P(x, y)$ pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ vektor felírható $\overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j}$ alakban, ahol $\underline{i}$ és $\underline{j}$ a tengelyek irányába mutató egységvektorok. Ha $\mathcal{T}$ az említettek közül egy olyan geometriai transzformáció, amely az origót helyben hagyja és $\underline{i}$-t $\underline{i}'$-be, $\underline{j}$-t pedig $\underline{j}'$-be képezi, akkor $\overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j}$ képe $x\underline{i}' + y\underline{j}'$. Írjuk fel – $\overrightarrow{OP}$-hez hasonlóan – az $\underline{i}'$ és $\underline{j}'$ vektorokat is $\underline{i}' = t_{11}\underline{i} + t_{21}\underline{j}$, $\underline{j}' = t_{12}\underline{i} + t_{22}\underline{j}$ alakban; ekkor $\overrightarrow{OP}$ képe a $\mathcal{T}$ transzformációnál $\mathcal{T}(\overrightarrow{OP}) = x\underline{i}' + y\underline{j}' = x(t_{11}\underline{i} + t_{21}\underline{j}) + y(t_{12}\underline{i} + t_{22}\underline{j}) = (t_{11}x + t_{12}y)\underline{i} + (t_{21}x + t_{22}y)\underline{j}$. Ekkor látható, hogy a képvektor $t_{11}x + t_{12}y$, illetve $t_{21}x + t_{22}y$ koordinátáiból álló oszlopmátrix:

$$\begin{pmatrix} t_{11}x + t_{12}y \\ t_{21}x + t_{22}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A $\mathcal{T}$ transzformáció tehát egy mátrixszal – a $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ mátrixszal – adható meg, és egy tetszőleges vektor képének a koordinátáit ebből a mátrixból és a vektor koordinátáiból, mátrixszorzással kapjuk meg. Ennek a mátrixnak az oszlopai pedig éppen az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektorok képeként adódó vektorok.

A korábbi egyenletrendszert a transzformációk nyelvén megfogalmazva látható, hogy az egyenletmegoldás alaphelyzetébe kerültünk: „Gondoltam egy (x, y) számpárt, alkalmaztam rá a transzformációt, és a (c_1, c_2)-t kaptam. Melyik számpárra gondoltam?”

Vizsgáljuk meg ezután, hogy az ismert geometriai transzformációknak mi a mátrix alakja. A legegyszerűbb talán az origó középpontú hasonlóság. Ha ennek aránya λ, akkor az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektor egyaránt a λ-szorosára változik, sőt minden vektor mindkét koordinátája a λ-szorosára változik. Így a mátrixa $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ és valóban:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Ennél kissé többet kell dolgozni az origó körüli forgatás mátrixáért. Ha az elforgatás szöge α, akkor – a szögfüggvények definíciója alapján – az $\underline{i}$ vektor képe $\cos\alpha\underline{i} + \sin\alpha\underline{j}$, a mátrix első oszlopában tehát a $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ értékek állnak. A második oszlop, a $\underline{j}$ vektor képe pedig az $\underline{i}$ képének a 90 fokos elforgatottja, ami $-\sin\alpha\underline{i} + \cos\alpha\underline{j}$. Tehát a mátrixa $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ alakú.

Mielőtt továbbmennénk, érdemes megnézni, mi történik, ha az α szögű forgatást követően még egy β szöggel is forgatunk. A két forgatást egymás után végrehajtva összesen $\alpha + \beta$ szöggel forgattunk, ennek a transzformációnak a mátrixa az előbbiek szerint $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$. Másrészt az α-val történő elforgatás az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$-t a fentiek szerint

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{pmatrix}\text{-ba}$$

viszi, ezt pedig a β szögű forgatás

$$\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot y\\ \sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha)x-(\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha)y\\ (\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha)x+(-\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha)y\end{pmatrix}\text{-ba.}$$

Mivel ez éppen

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)x-\sin(\alpha+\beta)y\\ \sin(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha+\beta)y\end{pmatrix},$$

a kapott azonosságból leolvashatók a szinusz- és koszinuszfüggvényre vonatkozó addíciós képletek. Ezen túlmenően az is kiderül, hogyan célszerű értelmezni a $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ *mátrixok szorzatát,* ha azt akarjuk, hogy azzal megszorozva az $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ oszlopot ugyanazt kapjuk, mintha $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$-t előbb $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$-val, majd a kapott oszlopot $\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$-val szoroznánk meg; így a két 2×2-es mátrix szorzatára kapott definíció:

$$\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\overset{\text{def.}}{=}$$
$$\overset{\text{def.}}{=}\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha & \cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha\\ \cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha & -\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha\end{pmatrix},$$

illetve általában egy $\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix}$ és egy $\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{pmatrix}$ mátrix szorzata

$$\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_{11}s_{11}+t_{12}s_{21} & t_{11}s_{12}+t_{12}s_{22}\\ t_{21}s_{11}+t_{22}s_{21} & t_{21}s_{12}+t_{22}s_{22}\end{pmatrix};$$

pontosan ezzel érjük el, hogy a megfelelő $\mathcal{T}$ és $\mathcal{S}$ transzformációk egymás után alkalmazásának (kompozíciójának) a mátrixa a $\mathcal{T}$ és $\mathcal{S}$ transzformációk mátrixának a szorzata legyen. Másszóval a (meglehetősen mesterkéltnek tűnő) mátrixszorzás magyarázatát a megfelelő transzformációk kompozíciója adja.

Haladjunk ezután tovább a nevezetes geometriai transzformációk sorában: jelölje ezúttal $\mathcal{T}$ az origón átmenő, az x tengellyel (pontosabban az $\underline{i}$ egységvektorral) γ szöget bezáró egyenesre való tükrözést. Az $\underline{i}$ tükörképe éppen az ő 2γ szögű elforgatottja, azaz $\cos 2\gamma\cdot\underline{i}+\sin 2\gamma\cdot\underline{j}$, a $\underline{j}$ tükörképe pedig az $\underline{i}$ képének a $-90°$-os elforgatottja: $\sin 2\gamma\cdot\underline{i}-\cos 2\gamma\cdot\underline{j}$; a tükrözés mátrixa tehát $\begin{pmatrix}\cos 2\gamma & \sin 2\gamma\\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma\end{pmatrix}$.

Ellenőrzésként érdemes megnézni, mi történik, ha egymás után két egyenesre tükrözünk: az első egyenes az $\underline{i}$ egységvektorral γ, a második δ szöget zárjon be; a két tükrözés kompozíciójának mátrixa a két tükrözés mátrixának szorzata:

$$\begin{pmatrix}\cos 2\gamma & \sin 2\gamma\\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos 2\delta & \sin 2\delta\\ \sin 2\delta & -\cos 2\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2(\gamma-\delta) & -\sin 2(\gamma-\delta)\\ \sin 2(\gamma-\delta) & \cos 2(\gamma-\delta)\end{pmatrix}.$$

Látható, hogy ez éppen a $\gamma-\delta$ szög 2-szeresével való forgatásnak a mátrixa, ahol $\gamma-\delta$ a két egyenes által bezárt szög. Ezzel beláttuk, hogy két tengelyes tükrözés kompozíciója az egyenesek által bezárt szög kétszeresével való elforgatás az egyenesek metszéspontja körül.

Szakadjunk el most egy rövidebb időre a „nevezetes” geometriai transzformációktól és gondoljunk arra, hogy a látottak mintájára bármely 2×2-es mátrix segítségével megadhatunk egy transzformációt: ha $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ egy ilyen mátrix, akkor az $\mathcal{A}$ transzformáció vigye a tetszőleges $\overrightarrow{OP}=x\underline{i}+y\underline{j}$ vektort $(a_{11}x+a_{12}y)\underline{i}+(a_{21}x+a_{22}y)\underline{j}$-be. Ennek így általában nehéz lenne szemléletes geometriai jelentést tulajdonítani; ha azonban például $a_{12}=a_{21}=0$, akkor látható, hogy $\mathcal{A}(x\underline{i})=a_{11}x\underline{i}$ és $\mathcal{A}(y\underline{j})=a_{22}y\underline{j}$, tehát a transzformáció – legalábbis két irányban – „szépen viselkedik”: az $\underline{i}$ irányában a_{11}-szeres, a $\underline{j}$ irányában pedig a_{22}-szeres középpontos hasonlóságként. Esetünkben ennek az volt az oka, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa, $\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}$ úgynevezett *diagonális* mátrix. A jelenség azonban szerencsére ennél szélesebb körben fordul elő. Nézzük példaként a $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ mátrixot, ami szemlátomást nem diagonális. Viszont

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\quad\text{és}\quad\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 18\end{pmatrix};$$

tehát a mátrixunknak megfelelő $\mathcal{B}$ transzformáció a $\underline{b}_1=\underline{i}-\underline{j}$ vektort önmagába képezi, a $\underline{b}_2=2\underline{i}+3\underline{j}$ vektort pedig $12\underline{i}+18\underline{j}=6\underline{b}_2$-be.

Mi ebből a tanulság? A vektorokat ne $\underline{i}$ és $\underline{j}$, hanem $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ segítségével írjuk fel! Ekkor ugyanis egy $u\underline{b}_1 + v\underline{b}_2$ alakban felírt vektort a $\mathcal{B}$ transzformáció egyszerűen $u\underline{b}_1 + 6v\underline{b}_2$-be képezi. Ahhoz, hogy az eredetileg $x\underline{i} + y\underline{j}$ alakban fölírt vektort ilyen formában megkapjuk, elegendő az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ egységvektorokat felírnunk $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ segítségével:

$$\underline{i} = \frac{3}{5}\underline{b}_1 + \frac{1}{5}\underline{b}_2, \qquad \underline{j} = -\frac{2}{5}\underline{b}_1 + \frac{1}{5}\underline{b}_2;$$

ekkor

$$x\underline{i} + y\underline{j} = x\left(\frac{3}{5}\underline{b}_1 + \frac{1}{5}\underline{b}_2\right) + y\left(-\frac{2}{5}\underline{b}_1 + \frac{1}{5}\underline{b}_2\right) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y\right)\underline{b}_2,$$

így

$$\mathcal{B}(x\underline{i} + y\underline{j}) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y\right)\underline{b}_1 + 6\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y\right)\underline{b}_2.$$

A mátrixok nyelvén ez azt jelenti, hogy a vektor képének $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ szerinti u', v' koordinátái (azaz a $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ irányú összetevőkkel való felírásában a két együttható) az eredeti ($\underline{i}$, $\underline{j}$ szerinti) (x, y) koordinátákból az

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

szerint kaphatók meg. Az eredmény $\underline{i}$, $\underline{j}$ szerinti x', y' koordinátáit ebből már könnyű kiszámítani:

$$u'\underline{b}_1 + v'\underline{b}_2 = u'(\underline{i} - \underline{j}) + v'(2\underline{i} + 3\underline{j}) = (u' + 2v')\underline{i} + (-u' + 3v')\underline{j}$$

alapján

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Mivel az egyenlőség mindkét oldalán az $\underline{i}$, $\underline{j}$ szerinti koordináták szerepelnek, a három mátrix szorzata a $\mathcal{B}$ transzformáció eredeti mátrixát adja, vagyis

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

A kapott háromtényezős előállítás geometriai jelentése tehát a következő. A $\mathcal{B}$ transzformáció végrehajtását három fázisra bontjuk: először az $\underline{i}$, $\underline{j}$ által meghatározott koordináta-rendszerről áttérünk a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ szerinti koordináta-rendszerre – ennek felel meg a jobb szélső tényező; utána a transzformáció szempontjából kellemes rendszer szerint végrehajtjuk $\mathcal{B}$-t – ezt mutatja a középső tényező; végül visszatérünk az eredeti $\underline{i}$, $\underline{j}$ koordináta-rendszerre – ezt írja le a bal szélső tényező.

Mivel a két szélső mátrix egymással ellentétes, illetve fordított irányú lépést jelenít meg, nem túlságosan meglepő, hogy szorzatuk,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a „semleges" ún. *egységmátrix,* ami a mátrixok szorzására ugyanúgy viselkedik, mint a közönséges számoknál az 1: a vele való szorzás mindent változatlanul hagy. Ennek alapján azt mondjuk, hogy a két mátrix egymás *inverze:* $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, illetve $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1}$.

A mátrixok iménti „diagonalizált" háromtényezős felírásának egy alkalmazására mutatunk példát a következő részben.

Hatványozás és lineáris rekurziók

A mátrixoknak ez a meglepően messze vezető alkalmazása a lineáris rekurzióval definiált sorozatokkal kapcsolatos. A módszert – az elméleti és a technikai nehézségek kikerülése végett – egy „kisméretű" és jól ismert példán, a Fibonacci-féle sorozaton mutatjuk be, utána próbáljuk majd a kérdést valamivel általánosabban is áttekinteni.

A Fibonacci-féle sorozatot a következőképpen definiáljuk: legyen $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, és minden $n \geq 1$-re $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Hogyan kerülnek ide mátrixok? Legyen (minden $n \geq 1$-re) $\underline{v}_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$, ekkor a sorozat megadási módjából következően van olyan 2×2-es A mátrix, amelyre $A\underline{v}_n = \underline{v}_{n+1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Mivel ez minden n-re érvényes, alkalmazzuk rendre $n = 1$-re, 2-re, 3-ra stb.: $\underline{v}_2 = A\underline{v}_1$, $\underline{v}_3 = A\underline{v}_2 = A(A\underline{v}_1) = A^2\underline{v}_1$, $\underline{v}_4 = A\underline{v}_3 = A(A^2\underline{v}_1) = A^3\underline{v}_1$; látható, hogy általában $\underline{v}_{n+1} = A^n\underline{v}_1$. Ahhoz tehát, hogy a sorozat n-edik tagját közvetlenül, az n függvényében felírhassuk elegendő, ha ebben az értelemben ismerjük az A mátrix hatványait. Túl sokat kísérletezni nem érdemes az A első néhány hatványának kiszámításával: az egyetlen szabályszerűség, amit észrevehetünk az, hogy A hatványaiban maguk a Fibonacci-számok jelennek meg, a kör tehát ebben az irányban bezárul.

Újabb nekifutásként próbáljuk meg felmérni: vajon minden (2×2-es) mátrix hatványozása ilyen nehézséggel jár-e. Nem nehéz rájönni, hogy bizonyos speciális mátrixok esetében ez egyáltalán nem így van. Ha például $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ típusú, azaz diagonális mátrix, akkor „elemenként" hatványozható, azaz $B^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$. Kérdés, hogy a diagonális mátrixoknak ez a kedvező tulajdonsága átörökíthető-e minden mátrixra, vagy legalábbis a (nem diagonális) mátrixok egy részére.

A részleges megoldást pontosan az előző részben megismert felbontás nyújtja! Legyen M invertálható mátrix, B pedig ezzel megegyező méretű diagonális. Hatványozzuk az $A = M^{-1}BM$ mátrixot:

$$\begin{aligned} A^2 &= M^{-1}BM \cdot M^{-1}BM = M^{-1}B^2M, \\ A^3 &= M^{-1}BM \cdot M^{-1}B^2M = M^{-1}B^3M \quad \text{stb.} \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy (minden n-re) $A^n = M^{-1}B^nM$, tehát azokat a mátrixokat valóban könnyen tudjuk hatványozni, amelyek A-hoz hasonlóan származtathatók egy diagonális mátrixból. Nézzük meg, hogy a Fibonacci-féle sorozattal kapcsolatba hozott $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix előállítható-e ilyen módon. Ennek eldöntéséhez olyan $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ mátrixot keresünk, amelyre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} M$$

teljesül, alkalmas c_i számokkal. Mivel ismeretlen mátrix inverzével nagyon kényelmetlen lenne a számolás, szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát balról M-mel:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 \\ y_1 + y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_1 & c_1x_2 \\ c_2y_1 & c_2y_2 \end{pmatrix}.$$

A két mátrix megfelelő elemeinek kell egyenlőnek lennie, vagyis

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= c_1x_1 & \qquad y_1 + y_2 &= c_2y_1 \\ x_1 &= c_1x_2 & y_1 &= c_2y_2, \end{aligned}$$

rendezve:

$$\begin{aligned} (1 - c_1)x_1 + x_2 &= 0 & \qquad x_1 - c_1x_2 &= 0 \\ (1 - c_2)y_1 + y_2 &= 0 & y_1 - c_2y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Itt az első és második egyenletből álló rendszer független a harmadik és negyedik egyenletből álló rendszertől, viszont a két rendszer azonos szerkezetű: x helyébe y-t, c_1 helyébe c_2-t írva kapjuk az utóbbit az előbbiből. Az első két egyenlet rendszerét megoldva:

$$x_1 = c_1x_2, \quad \text{ebből} \quad \big((1 - c_1)c_1 + 1\big)x_2 = 0.$$

$x_2 = 0$ esetén $x_1 = 0$, és így az M mátrixnak nem létezne inverze, mivel első sora csupa nulla; ezért $1 + c_1 - c_1^2 = 0$, azaz

$$c_1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \text{és ehhez teljesen hasonlóan} \quad c_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A c_1 és c_2 nem lehet egymással egyenlő, mivel akkor ($x_1 = c_1x_2$ és $y_1 = c_2y_2$ miatt) az M első oszlopa a második oszlop $c_1 = c_2$-szerese volna, és emiatt M-nek nem létezne inverze. Válasszuk ezért c_1-et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$-nek, c_2-t pedig $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$-nek. Az x_2 és az y_2 értéke tetszőleges nemnulla számnak választható, legyen mind a kettő 1; ekkor

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

és ezekkel valóban

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] \end{pmatrix},$$

ebből pedig az n-edik Fibonacci-féle számra

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Célunkat a Fibonacci-féle számok explicit előállítására elértük, és az ennek érdekében végzett számolás nyilván minden olyan konkrét esetben célhoz vezet, amikor a hatványozni kívánt mátrix egyáltalán előállítható a kívánt $M^{-1}BM$ alakban – az ilyen mátrixról azt mondjuk, hogy *diagonalizálható.* Sajnos nem minden mátrix ilyen, például (a Fibonacci-sorozatnak megfelelő mátrixhoz látszólag nagyon hasonló) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix nem diagonalizálható. (Vigasszal szolgálhat ugyanakkor, hogy ezt a mátrixot nagyon könnyű hatványozni, az első néhány hatványban észrevett szabályszerűséget indukcióval egyszerűen beláthatja az Olvasó.)

A továbbiakban – a 2×2-es mátrixok keretein túllépve – összefoglaljuk a mátrixokra értelmezett alapvető műveleteket és azok legfontosabb tulajdonságait. Ezután röviden tárgyaljuk az ezekhez szorosan kapcsolódó lineáris egyenletrendszerekre vonatkozó lényegesebb tudnivalókat. Akik ezt a két részt túlságosan száraznak találják, nyugodtan lapozzák át; az utána következő témák részben így is követhetőek lesznek, legfeljebb egy-egy ismeretlen fogalom, jelölés vagy állítás azonosítása végett lesz majd érdemes ide alkalmanként visszatérni.

Műveletek mátrixokkal

Összeadás. Két, n darab sorból és k oszlopból álló (röviden $n \times k$-as) mátrix összege az az ugyancsak $n \times k$-as mátrix, amelyet a két mátrix megfelelő helyén álló elemek összeadásával kapunk, azaz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nk}+b_{nk} \end{pmatrix}$$

Hasonlóan egyszerűen, illetve természetesen értelmezett egy mátrix *számszorosa:* az adott mátrix minden elemét szorozzuk meg az illető számmal, vagyis

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1k} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \dots & ca_{nk} \end{pmatrix}$$

Szorzás. Két mátrix szorzatát viszont a következő, kezdetben roppant furcsának tűnő módon értelmezzük. Legyen A egy $n\times k$-as, B pedig $k\times\ell$-es mátrix; ekkor A és B szorzata az az $n\times\ell$-es C mátrix legyen, amelynek (i,j)-edik elemét az A mátrix i-edik sorának és a B mátrix j-edik oszlopának megfelelő elemeit összeszorozva, e szorzatok összegeként kapjuk: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$. Hangsúlyozandó, hogy A és B szorzata – ebben a sorrendben – csak akkor értelmezett, ha A-nak annyi oszlopa van, ahány sora B-nek, és ekkor az AB szorzatnak annyi sora lesz, mint A-nak, és annyi oszlopa, mint B-nek. Vegyük továbbá észre, hogy AB-nek az (i,j)-edik eleme az A i-edik sorának (mint $1\times k$-as mátrixnak) és a B j-edik oszlopának (mint $k\times 1$-es mátrixnak) a szorzata, legalábbis abban az értelemben, hogy az utóbbi 1×1-es mátrixot azonosítjuk az ő egyetlen elemével. Ebből következik, hogy AB-nek a j-edik oszlopa megegyezik A-nak és B j-edik oszlopának a szorzatával.

Mit mondhatunk ezen műveletek tulajdonságairól? A legtöbb – a számok körében teljesülő – műveleti tulajdonság, illetve azonosság itt is érvényben marad: az $n\times k$-as mátrixok összeadása kommutatív és asszociatív, a csupa nullából álló $\mathbf{0}$ nullmátrixra $A+\mathbf{0}=A$ teljesül (minden A-ra), bármely A-nak létezik ellentettje $\big(-A=(-1)\cdot A\big)$ amelyre $A+(-A)=\mathbf{0}$. Mátrixoknak számmal és mátrixszal való szorzása egyaránt disztributív az összeadásra nézve: $c(A+B) = cA+cB$, $M(A+B)=MA+MB$, $(A+B)D=AD+BD$ minden, megfelelő méretű A, B, M, D mátrixra. Belátható továbbá, hogy a mátrixszorzás asszociatív: ha A, B és C megfelelő méretű mátrixok, akkor $(AB)C=A(BC)$.

Baj van viszont a mátrixszorzás kommutativitásával! Ha A egy $n\times k$-as, B pedig $t\times r$-es mátrix, akkor AB értelmezéséhez $k=t$, BA értelmezéséhez $r=n$ szükséges; ekkor AB mérete $n\times r$, azaz $n\times n$, BA mérete pedig $t\times k$, vagyis $k\times k$. Ahhoz, hogy egyáltalán értelme legyen megkérdezni, vajon AB egyenlő-e BA-val mindenképpen szükséges, hogy a két szorzat azonos méretű legyen, tehát A és B egyaránt $n\times n$-es. A szorzás azonban még ebben a meglehetősen korlátozott körben sem kommutatív; pl. $n=2$-re $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

Ez a szorzás egyúttal arra is figyelmeztető példát ad, hogy két mátrix szorzata lehet úgy is nulla, hogy eközben egyik tényező sem az.

A mátrixszorzás – egyelőre csupán a jelölések szintjén – első és talán legtermészetesebb alkalmazása a *lineáris egyenletrendszerek* terén adódik. Lineáris egyenletrendszeren általában a következő típusú feladatot értjük. Adottak az a_{ij} és a b_i számok, ahol $1\le i\le n$, $1\le j\le k$ (alkalmas n és k pozitív egészekkel); keresendők mindazon $x_1, x_2, \ldots, x_k$ számok, amelyek eleget tesznek a következő egyenleteknek:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k &= b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k &= b_2\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

Legyen ekkor $A=(a_{ij})$ az egyenletrendszer együtthatóiból álló $n\times k$-as mátrix, $\underline{b}=(b_i)$ pedig az egyenletek jobb oldalán álló konstansokból képezett $n\times 1$-es (oszlop)mátrix. Ha az ismeretlenekből álló $k\times 1$-es $\underline{x}=(x_j)$ (oszlop)mátrixot is bevezetjük, akkor az (1) egyenletrendszer ekvivalens az

$$A\underline{x}=\underline{b} \tag{2}$$

mátrixegyenlettel, hiszen az $A\underline{x}$ mátrix i-edik sora éppen az (1) i-edik egyenletének bal oldala. Ez azt sugallja, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldásához „osztani” kell(ene) az A együttható-mátrixszal. A számok körében végezhető közönséges osztáshoz hasonlóan az osztás a reciprokkal (a multiplikatív inverzzel) történő szorzást jelenti, a reciprokképzés pedig az 1 osztását. Ehhez először is meg kell találni az 1 szám megfelelőjét a mátrixok körében. Ez nem más, mint az az $n\times n$-es mátrix (tetszőleges n-re) amelyben az első sor első, a második sor második, ..., az n-edik sor n-edik eleme 1, az összes többi pedig nulla:

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $AI_n=A$ és $I_nB=B$ valóban teljesül minden $k\times n$-es A és $n\times k$-as B mátrixra. Mit értsünk ezután egy $n\times k$-as M mátrix inverzén? Mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, kétfélét is érthetünk: olyan B mátrixot, amelyre $BM=I_k$, vagy olyan C mátrixot, amelyre $MC=I_n$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy B az M-nek *balinverze*, C pedig *jobbinverze*. A szorzás értelmezéséből közvetlenül adódik, hogy B és C csakis $k\times n$-es lehet. Egyébként két különböző dologról van szó, azaz egyik tulajdonságból sem következik a másik. Például az $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ mátrixnak van jobbinverze (több is!), ilyen pl. $C=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, viszont nincs balinverze: az M-nek egyenlő az első és a második oszlopa, ezért akármilyen (3×2-es) B mátrixszal szorozzuk is balról, a szorzatban is megegyezik az első és a második oszlop, így az nem lehet (a 3×3-as) egységmátrix. Hasonlóan látható, hogy például a csupa 1-esből álló

3×4-es mátrixnak nincs sem bal, sem jobb oldali inverze. Egyszerűbb a helyzet, ha M *négyzetes mátrix,* azaz $n = k$. Ekkor M-nek vagy nem létezik semmilyen oldali inverze sem, vagy egyetlen bal és egyetlen jobb oldali inverze van, és ezek egymással egyenlők; utóbbi esetben ezt az egyértelmű mátrixot hívjuk az M *inverzének*, és M^{-1}-nel jelöljük.

Térjünk vissza ezután az inverzek kiszámításához. Ha például az $n \times k$-as A mátrixhoz keresünk egy B jobbinverzet, akkor az $AB = I_n$ mátrixegyenletet kell megoldanunk. Jelölje az I_n oszlopait rendre $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$, a B mátrix ismeretlen oszlopait pedig $\underline{y}^{(1)}, \underline{y}^{(2)}, \dots, \underline{y}^{(n)}$. Ekkor $AB = I_n$ pontosan azt jelenti, hogy $A\underline{y}^{(i)} = \underline{e}_i$, minden $i \leq n$-re. Ez n darab – egyenként n egyenletből álló – lineáris egyenletrendszert jelent (amelyeknek közös az együttható-mátrixuk). Ebből is látható, hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldásának kérdése nem kerülhető meg.

Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerekkel a középiskolában elsősorban a koordináta-geometriában találkozhatunk: például két egyenes közös részének meghatározásához az egyenesek egyenleteiből álló lineáris egyenletrendszert kell megoldani: ha mindkét ismeretlenre egyértelmű megoldás adódik, az azt jelenti, hogy az egyenesek egy pontban metszik egymást; ha nincs megoldás, akkor az egyenesek párhuzamosak.

A következőkben röviden ismertetjük a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egyik módszerét, amelyet Gauss-féle kiküszöbölésnek (eliminációnak) neveznek. Tekintsük ehhez az (1) egyenletrendszert, és jelöljük az i-edik egyenletét E_i-vel. Az eljárás során az egyenleteket úgy alakítjuk át, hogy egyrészt a rendszer megoldásainak halmaza ne változzon, másrészt az átalakítások sorozata olyan egyenletrendszerre vezessen, amiből a megoldás közvetlenül leolvasható. E kettős célt a következő két lépés megfelelő számú alkalmazásával érjük el:

(*a*) $E_i \to E_i' = cE_i$, ahol $c \neq 0$ (az i-edik egyenletet úgy változtatjuk, hogy mindkét oldalát megszorozzuk a nemnulla c számmal);

(*b*) $E_i \to E_i' = E_i + dE_j$, ahol d tetszőleges szám és $j \neq i$ (az i-edik egyenletet úgy változtatjuk, hogy hozzádjuk a j-edik egyenlet d-szeresét; a j-edik egyenlet természetesen változatlan marad).

Mind a kétféle lépés olyan, hogy a rendszer egyetlen egyenletét változtatja csak meg. Az (a) esetén világos, hogy az új, E_i' egyenlet ekvivalens az eredeti E_i-vel, így a kapott új egyenletrendszernek ugyanazok a megoldásai, mint az eredetinek. A (b) alkalmazása esetén az látszik, hogy a kapott új, E_i' egyenlet az E_i és az E_j egyenletek együttes következménye, ezért az így kapott új egyenletrendszernek az eredeti rendszer minden megoldása továbbra is megoldása marad. Ez azonban fordítva is igaz, mivel az új egyenletrendszerből következményként visszakaphatjuk a régit: csupán a megváltozott i-edik egyenletet kell következményként visszaállítani, ami egyszerű: $E_i = E_i' - dE_j$.

Tudva, hogy az (a) és (b) típusú lépésekkel az eredetivel ekvivalens egyenletrendszerekhez jutunk, már csak arra kell törekedni, hogy ezek segítségével egyre „szebb” alakúra formáljuk (1)-et. Tegyük fel ehhez, hogy $a_{11} \neq 0$; ha $a_{11} = 0$, akkor változtassuk meg az ismeretlenek számozását és szükség esetén az egyenletek sorrendjét is úgy, hogy az ekként adódó a_{11}' együttható már ne legyen nulla; ha ezt még így sem tudjuk elérni az azt jelenti, hogy mindegyik x_i ismeretlen együtthatója minden egyenletben nulla, tehát egyenleteink valamennyien $0 = b_i$ alakúak. Ekkor nincs is több teendőnk: ha valamelyik b_i értéke nullától különböző, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása (hiszen tartalmaz „nulla = nemnulla” típusú egyenletet), míg abban az esetben, ha minden b_i értéke nulla, az egyenletrendszernek minden szám k-as megoldása.

Tegyük fel tehát, hogy $a_{11} \neq 0$. Az (a) lépést az első egyenletre alkalmazva elérhető, hogy $a_{11} = 1$ legyen. Ezután a (b) lépést alkalmazzuk egymás után a második, harmadik, $\dots$, n-edik egyenletre úgy, hogy rendre kivonjuk belőlük az első egyenlet a_{21}-szeresét, $\dots$, a_{n1}-szeresét. Így az x_1 együtthatója az első egyenletben 1, a többiben pedig nulla.

Folytassuk az eljárást, ezúttal az első egyenletre koncentrált lépéssorozatot a második egyenletre irányítva: szeretnénk, hogy a második egyenletben x_2 aktuális a_{22}' együtthatója ne legyen nulla. Ha az $x_2, \dots, x_k$ ismeretlenek átszámozásával és a másodiktól az n-edikig terjedő egyenletek sorrendjének megváltoztatásával sem érhető ez el, akkor a korábbiakhoz hasonlóan ezek mind $0 = b_i'$ alakúak, és az egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy (ha $b_2', \dots, b_n'$ mindegyike nulla) az $x_2, \dots, x_k$ ismeretlenek értéke tetszőleges lehet, az x_1 pedig az első egyenletből ezekkel kifejezhető. Feltéve, hogy $a_{22}' \neq 0$, a második egyenletet a_{22}'-vel osztva elérjük, hogy $a_{22}' = 1$; ezután alkalmazzuk a (b) lépést úgy, hogy az első, a harmadik, $\dots$, n-edik egyenletből rendre kivonjuk a második egyenlet a_{12}'-szeresét, $\dots$, a_{n2}'-szeresét. Ezzel x_2 együtthatója a második egyenletben 1, a többiben pedig nulla – miközben x_1 „kellemes” együtthatói sehol nem változnak.

Az eljárást ezután a harmadik egyenletre és x_3 együtthatóinak kiritkítására összpontosítva folytatjuk stb. Végül (az ismeretlenek esetleges átszámozását és az egyenletek sorrendjének megváltoztatását is megengedve) az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$
(3)\qquad
\begin{array}{llll}
x_1 & & +c_{1,r+1}x_{r+1}+\ldots+c_{1,k}x_k & =d_1\\
& x_2 & +c_{2,r+1}x_{r+1}+\ldots+c_{2,k}x_k & =d_2\\
& \ddots & & \\
& & x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\ldots+c_{r,k}x_k & =d_r\\
& & 0 & =d_{r+1}\\
& & & \vdots\\
& & 0 & =d_n
\end{array}
$$

Ha $d_{r+1},\ldots,d_n$ valamelyike nullától különböző, akkor nincs megoldás, egyébként az $x_{r+1},\ldots,x_k$ ismeretlenek értéke tetszőlegesen megválasztható, ezekkel pedig $x_1,\ldots,x_r$ rendre kifejezhető az első r egyenletből

$$x_i = d_i - (c_{i,r+1}x_{r+1}+\ldots+c_{i,k}x_k)$$

szerint. Vegyük észre, hogy ha van megoldás, és $n<k$ (vagyis több ismeretlen van, mint ahány egyenlet), akkor az egyenletrendszernek biztosan egynél több megoldása van, hiszen ekkor $r\le n<k$ miatt lesznek olyan ismeretlenek, amelyek értéke szabadon megválasztható. E megállapítás roppant fontos speciális esete a következő:

($*$) Tegyük fel, hogy az (1) egyenletrendszerben $b_1=\ldots=b_n=0$ – az ilyen egyenletrendszert *homogénnek* nevezzük. Homogén lineáris egyenletrendszernek biztosan van megoldása, nyilván ilyen például $x_1=x_2=\ldots=x_k=0$ (ezt szokás a rendszer *triviális megoldásának* nevezni). Ha ilyenkor $n<k$, akkor a fentiek szerint létezik az egyenletrendszernek a triviálistól különböző megoldása is, ahol tehát nem mindegyik x_i értéke nulla.

Lineáris kombináció, függetlenség, bázis

Ebben a részben a mátrixműveletek közül elsősorban az összeadásra és a számmal való szorzásra lesz szükség.

Legyenek $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k$ $n\times 1$-es oszlopmátrixok és legyenek $x_1,x_2,\ldots,x_k$ tetszőleges számok. Az

$$x_1\underline{v}_1+x_2\underline{v}_2+\ldots+x_k\underline{v}_k$$

kifejezést (ami ugyancsak egy $n\times 1$-es oszlopmátrix) a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k$ rendszer elemeinek az $x_1,x_2,\ldots,x_k$ együtthatókkal képezett *lineáris kombinációjának* hívjuk. Ha az összes x_i együttható nulla, akkor nyilván a kombináció értéke a csupa nullából álló oszlopmátrix. Ha az együtthatók minden más értéke esetén (vagyis ha nem mindegyikük nulla) a kombináció sosem egyenlő a csupa nullából álló oszlopmátrixszal, akkor a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k$ rendszert *(lineárisan) függetlennek* nevezzük. Azt mondjuk továbbá, hogy a rendszer *(lineárisan) összefüggő*, ha nem független, azaz létezik olyan nemtriviális lineáris kombinációja, ami a csupa nullából álló $\underline{0}$ oszlopmátrixot adja.

Hogyan dönthető el, hogy egy rendszer független-e? Meg kell vizsgálni, hogy az x_i számok mely értékére lesz a velük képezett lineáris kombináció $\underline{0}$, azaz meg kell oldanunk az $x_1\underline{v}_1+x_2\underline{v}_2+\ldots+x_k\underline{v}_k=\underline{0}$ egyenletet. Ha $\underline{v}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$, akkor

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\ldots+x_k\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1k}x_k\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2k}x_k\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nk}x_k\end{pmatrix},$$

azaz – a két szélső oszlopmátrix megfelelő elemeit egyenlővé téve – egy homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk (pl. az ismertetett Gauss-féle elimináció módszerével). Ha megoldásként csak a triviális adódik, akkor a rendszer független, egyébként pedig összefüggő.

Könnyen látható, hogy független rendszer bármelyik elemét elhagyva a megmaradó rendszer is független. Az is gyorsan ellenőrizhető, hogy az I_n egységmátrix oszlopai független rendszert alkotnak. Megállapíthatjuk tehát, hogy az $n\times 1$-es oszlopmátrixok körében létezik egyelemű, kételemű, háromelemű, $\ldots$, n-elemű független rendszer. Vajon létezik-e n-nél több elemű is? A válasz nemleges: ha $k>n$, akkor egy $n\times 1$-es oszlopmátrixokból álló k-elemű rendszer biztosan összefüggő, hiszen ennek eldöntéséhez egy n egyenletből álló, k-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, amiről viszont ($*$) szerint tudjuk, hogy létezik nemtriviális megoldása.

Mit mondhatunk a maximális, azaz n-elemű független rendszerekről? Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ egy ilyen rendszer. Ha ehhez még hozzávesszünk egy tetszőleges $n\times 1$-es $\underline{z}$ oszlopmátrixot, akkor az így kapott $n+1$-elemű rendszer összefüggő, azaz van olyan nemtriviális lineáris kombinációja, ami nulla:

$$(4)\qquad x_1\underline{v}_1+x_2\underline{v}_2+\ldots+x_n\underline{v}_n+y\underline{z}=\underline{0}.$$

Megmutatjuk, hogy itt $y \neq 0$. Tegyük föl ugyanis, hogy $y = 0$, ekkor (4)-ből az marad, hogy $x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \ldots + x_n\underline{v}_n = \underline{0}$. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ rendszer azonban független, így ez csak a triviális lineáris kombináció lehet, azaz $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Ellentmondásra jutottunk, hiszen a (4)-ben látható kombináció nemtriviális. Tehát $y \neq 0$; ekkor $\underline{z}$-t könnyen kifejezhetjük (4)-ből: $\underline{z} = \left(-\frac{x_1}{y}\right)\underline{v}_1 + \left(-\frac{x_2}{y}\right)\underline{v}_2 + \ldots + \left(-\frac{x_n}{y}\right)\underline{v}_n$.

Azt kaptuk, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ lineáris kombinációjaként minden $n \times 1$-es oszlopmátrix kifejezhető; az ilyen tulajdonságú független rendszert *bázisnak* nevezzük.

Sajátérték és determináns

Próbáljunk meg a Fibonacci-sorozatnál alkalmazott számolás hátterére is egy pillantást vetni. Tegyük fel ezért, hogy A egy olyan $n \times n$-es mátrix, amely előáll $M^{-1}BM$ alakban, alkalmas $B = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & c_n \end{pmatrix}$ diagonális mátrixszal. Jelölje ezúttal is $\underline{e}_i$ az $n \times n$-es egységmátrix i-edik oszlopát. Ne feledjük, hogy egy tetszőleges $n \times n$-es G mátrixot az $\underline{e}_i$-vel jobbról megszorozva eredményül a G i-edik oszlopát kapjuk. Tekintsük ezután a keresett M mátrix inverzének az i-edik oszlopát, vagyis az $n_i = M^{-1}\underline{e}_i$ szorzatot. Erre

$$A \cdot \underline{n}_i = M^{-1}BM \cdot M^{-1}\underline{e}_i = M^{-1}B\underline{e}_i = M^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = M^{-1}(c_i\underline{e}_i) = c_iM^{-1}\underline{e}_i = c_i\underline{n}_i.$$

Kiderült, hogy $\underline{n}_i$ olyan (nem $\underline{0}$) oszlopmátrix, amely az A-val balról megszorozva a c_i-szeresére változik. Azt mondjuk ilyenkor, hogy $\underline{n}_i$ az A *sajátvektora*, és c_i az A mátrix $\underline{n}_i$-hez tartozó *sajátértéke*. Tehát M^{-1} oszlopai valamennyien sajátvektorai A-nak. Megmutatjuk, hogy ez már jellemzi is a megfelelő M^{-1} mátrixokat: ha $N := M^{-1}$ olyan invertálható mátrix, amelynek oszlopai az A-nak sajátvektorai, akkor $B := MAM^{-1}$ diagonális mátrix (főátlójában A sajátértékeivel), azaz $A = M^{-1}BA$ diagonalizálható. Jelölje ehhez ismét $\underline{n}_i$ az $N := M^{-1}$ mátrix i-edik oszlopát, ekkor feltételezésünk szerint $AM^{-1} = AN$-nek az i-edik oszlopa $A\underline{n}_i = c_i\underline{n}_i$, ezért $MAM^{-1} = M(AM^{-1})$-nek az i-edik oszlopa $M(c_i\underline{n}_i) = c_i(M\underline{n}_i) = c_i\big(M(M^{-1}\ i\text{-edik oszlopa})\big) = c_i(MM^{-1}\ i\text{-edik oszlopa}) = c_i(I_n\ i\text{-edik oszlopa}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; tehát valóban

$$MAM^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & c_n \end{pmatrix}$$

diagonális.

A kapott eredmények szerint *egy $n \times n$-es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha bizonyos sajátvektoraiból mint oszlopokból összeállítható egy invertálható $n \times n$-es mátrix.*

A kapott feltétel nyomán rögtön szemben találjuk magunkat a következő kérdéssel: hogyan határozhatjuk meg a sajátvektorokat?

A válasz kezdetben egyszerűnek tűnik: *ha ismerjük* az A mátrix sajátértékeit, akkor egy adott c_i sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása az

$$A\underline{x} = c_i\underline{x} \tag{5}$$

homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásainak a megkeresését jelenti, ez tehát (már) nem probléma. De honnan tudjuk (előre), hogy mik az A sajátértékei? Az (5) szerint ezek éppen azok a c_i számok, amelyekre az $A\underline{x} - c_i\underline{x} = \underline{0}$, illetve – némileg átrendezve – az $(A - c_iI_n)\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik a triviálistól különböző megoldása. A korábbiakra visszaemlékezve láthatjuk, hogy ez éppen akkor következik be, amikor az $A - c_iI_n$ mátrix oszlopainak rendszere lineárisan összefüggő. Persze ismerjük az eljárást, amivel *adott c_i esetén* ez eldönthető; de c_i ismeretlen lévén kedvezőbb lenne, ha az összefüggőség kérdését egy képletbe való behelyettesítéssel dönthetnénk el. Ilyen formula valóban létezik, a neve *determináns;* illusztrációként 2×2-es mátrixokra készítjük el.

Legyen a kérdéses mátrix $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$. A

$$\underline{d}_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix}, \qquad \underline{d}_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix}$$

oszlopok rendszere pontosan akkor összefüggő, ha léteznek olyan x_1 és x_2 számok, amelyek közül legalább az egyik nem nulla, és $x_1\underline{d}_1 + x_2\underline{d}_2 = \underline{0}$. Ha például $x_2 \neq 0$, akkor $\underline{d}_2 = -\frac{x_1}{x_2}\underline{d}_1$, azaz $\begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix} = -\frac{x_1}{x_2}\begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix}$. Ez éppen azt jelenti, hogy a $d_{12} : d_{11}$ és a $d_{22} : d_{21}$ arányok egyenlők (ugyanígy, ha $x_1 \neq 0$), azaz $d_{12}d_{21} = d_{11}d_{22}$, illetve $d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 0$. A $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ determinánsa tehát $\det D = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}$, ami pontosan akkor nulla, ha D oszlopai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak.

Ellenőrizzük mindezt a Fibonacci-sorozat mátrixára:

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - c_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 - c_i & 1 \\ 1 & -c_i \end{pmatrix} = (1 - c_i)(-c_i) - 1 \cdot 1 = c_i^2 - c_i - 1,$$

az ismerős másodfokú egyenlet.

Általában egy $n \times n$-es mátrix determinánsa olyan, a mátrix elemeiből képezett szorzatok előjeles összege, ahol – minden lehetséges módon – minden sorból és oszlopból kiválasztunk egy-egy (összesen n) elemet, és az értéke pontosan akkor nulla, ha a mátrix oszlopai összefüggő rendszert alkotnak. Elmondható tehát, hogy egy $n \times n$-es mátrix sajátvektorainak és sajátértékeinek meghatározása egy n-edfokú egyenlet és n darab, egyenként n egyenletből álló, n-ismeretlenes (homogén) lineáris egyenletrendszer megoldását igényli.

Egy kombinatorikai alkalmazás

Legyen H egy n-elemű véges halmaz, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pedig különböző részhalmazai H-nak. Kérdés: legfeljebb mennyi lehet a k, ha az A_i részhalmazok közül bármely kettőnek (mármint két különbözőnek) pontosan egy közös eleme van?

A kérdésben szereplő „legfeljebb” szó jogosságát az mutatja, hogy k-nak (n-hez képest) kicsi értékeire – például $k = 1, 2, 3$-ra – nagyon könnyű ilyen részhalmazokat megadni, viszont k növekedtével a metszetfeltétel egyre erősebb korlátozást jelent. Némi gondolkozás után azonban eszünkbe juthat a következő konfiguráció, amivel $k = n$ elérhető: Legyen $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, és legyen $A_1 = \{h_1\}$, $A_2 = \{h_1, h_2\}$, $A_3 = \{h_1, h_3\}$, …, $A_n = \{h_1, h_n\}$; itt bármely két részhalmaz metszete $\{h_1\}$. Egy másik, ehhez hasonló lehetőség: $A_1 = \{h_2, h_3, \ldots, h_n\}$, $A_2 = \{h_1, h_2\}$, $A_3 = \{h_1, h_3\}$, …, $A_n = \{h_1, h_n\}$. A kérdés ezután úgy módosítható, hogy lehet-e k az n-nél nagyobb. Megmutatjuk, hogy nem lehet. Ehhez mátrixokat használunk majd és azt az eredményt, hogy $n \times 1$-es oszlopmátrixokból álló független rendszernek legfeljebb n eleme lehet.

Előbb azonban térjünk vissza az elsőként talált konfigurációhoz. Ennek jellegzetessége, hogy az egyik részhalmaz egyelemű. Ha egy, a probléma feltételét kielégítő konfigurációról tudjuk, hogy az egyik részhalmaz egyelemű, akkor az szükségképpen része a többi részhalmaznak, hiszen a velük alkotott metszet csak úgy állhat egyetlen elemből. Ekkor viszont ez az elem alkotja bármely két részhalmaznak is a közös részét, ezért a többi $k - 1$ részhalmaznak ezen elemet nem tartalmazó része páronként diszjunkt halmazrendszert alkot. Mivel ezek egy $n - 1$ elemű halmaz nemüres részei, számuk legfeljebb $n - 1$ lehet. Tehát $k - 1 \leq n - 1$, azaz $k \leq n$. A továbbiakban ezért elegendő azokkal az esetekkel foglalkoznunk, amikor mindegyik A_i részhalmaznak legalább két eleme van.

Az A_j részhalmazokhoz oszlopmátrixokat rendelünk. Legyen $\underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$, ahol

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h_i \in A_j, \\ 0, & \text{ha } h_i \notin A_j. \end{cases}$$

Tetszőleges $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ oszlopmátrix *transzponáltjának* hívjuk a $\underline{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$ sormátrixot. A módszer azon az egyszerű észrevételen alapul, hogy

$$\underline{a}_j^{\mathrm{T}} \cdot \underline{a}_\ell = |A_j \cap A_\ell| = \begin{cases} |A_j| \geq 2, & \text{ha } j = \ell, \\ 1, & \text{ha } j \neq \ell. \end{cases} \tag{6}$$

Megmutatjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ rendszer lineárisan független; ebből a korábban látottak szerint valóban következik majd, hogy $k \le n$. Vizsgálnunk kell, hogy milyen lineáris kombinációjuk $\underline{0}$. Tegyük föl ezért, hogy

$$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \ldots + x_k\underline{a}_k = \underline{0},$$

ekkor (6) szerint nyilván

$$0 = \underline{0}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{0} = (\sum_{j=1}^{k} x_j\underline{a}_j)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\sum_{t=1}^{k} x_t\underline{a}_t\right) = \sum_{j=1}^{k} x_j^2\underline{a}_j^{\mathrm{T}} \cdot \underline{a}_j + \sum_{j\neq t} x_jx_t\underline{a}_j^{\mathrm{T}} \cdot \underline{a}_t =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} |A_j|x_j^2 + \sum_{j\neq t} x_jx_t = \sum_{j=1}^{k} \big(|A_j|-1\big)x_j^2 + \left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^2.$$

Itt a második összeg négyzete nemnegatív, az elsőben minden összeadandó szorzat nemnegatív, és a szorzatok $|A_j|-1$ tényezője pozitív. A teljes összeg ezért csak úgy lehet nulla, ha minden $x_j = 0$. Tehát $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ valóban lineárisan független.

Miután beláttuk, hogy legfeljebb n részhalmaz választható ki az előírt módon, felvetődik a kérdés, vajon mit lehet mondani azokról az esetekről, amikor éppen a maximális számú, n halmazból áll a rendszer. A kezdetben talált két konfiguráció alapján gondolhatjuk, hogy még sok, esetleg bonyolultabb szerkezetű példa is van, vagy ellenkezőleg: bizonyítékot kereshetünk arra, hogy további példákra nem nagyon számíthatunk, esetleg nincs is más a már találtakon kívül. Szerencsére nem kell előre eldönteni, melyik irányban próbálkozzunk – csupán használnunk kell azokat az oszlopmátrixokat, amelyekbe a részhalmazok adatait kódoltuk. Annyit azért érdemes elöljáróban észrevenni, hogy egy ilyen n tagból álló halmazrendszer szükségképpen lefedi a H-t: ha ugyanis lenne a H-nak olyan h eleme, ami egyik A_i részhalmazban sincs benne, akkor valamennyi A_i az $n-1$ elemű $H \setminus \{h\}$ halmaznak lenne része; de ott a bizonyítottak szerint legfeljebb $n-1$ ilyen részhalmazból álló rendszer található.

Tegyük fel tehát, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként különböző részhalmazai az n-elemű $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ halmaznak, mindegyikük legalább kételemű, és bármely kettőnek egyetlen közös eleme van. Láttuk, hogy ekkor a nekik megfelelő $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ oszlopmátrixok rendszere lineárisan független. Tudjuk viszont, hogy n-elemű független rendszerként bázist is alkotnak! Ez azt jelenti, hogy minden $n \times 1$-es oszlopmátrix előállítható az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ lineáris kombinációjaként. Használjuk ezt fel az I_n egységmátrix $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ oszlopaira:

(7) $$\underline{e}_i = \sum_{j=1}^{n} y_{i,j}\underline{a}_j.$$

Mielőtt továbbmennénk, vezessük be a következő jelölést: legyen

$$\delta_{i,A_j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h_i \in A_j, \\ 0, & \text{ha } h_i \notin A_j. \end{cases}$$

Így (6) és (7) szerint

$$\delta_{i,A_k} = \underline{a}_k^{\mathrm{T}} \cdot \underline{e}_i = \underline{a}_k^{\mathrm{T}} \cdot \sum_{j=1}^{n} y_{i,j}\underline{a}_j. = \sum_{j=1}^{n} y_{i,j}\underline{a}_k^{\mathrm{T}} \cdot \underline{a}_j = \sum_{j=1}^{n} y_{i,j}|A_k \cap A_j| =$$
$$= y_{i,k}|A_k| + \sum_{j\,:\,j\neq k} y_{i,j} = y_{i,k}\big(|A_k|-1\big) + \sum_{j=1}^{n} y_{i,j}.$$

Legyen $y_i = \sum_{j=1}^{n} y_{i,j}$, ekkor tehát

$$\delta_{i,A_k} = y_{i,k}\big(|A_k|-1\big) + y_i,$$

innen pedig

(8) $$y_{i,k} = \frac{\delta_{i,A_k} - y_i}{|A_k|-1},$$

amiből – y_i definíciója alapján –

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} y_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_{i,A_k} - y_i}{|A_k|-1}.$$

Ebből kifejezhető y_i:

$$y_i\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|A_k|-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_{i,A_k}}{|A_k|-1}=\sum_{k:\ h_i\in A_k}\frac{1}{|A_k|-1},$$

azaz

$$y_i=\left(\sum_{k:\ h_i\in A_k}\frac{1}{|A_k|-1}\right)\Big/\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|A_k|-1}\right).$$

Itt a számláló és a nevező egyaránt pozitív, és a számláló kisebb a nevezőnél; ezért

$$0<y_i<1.$$

A (8)-cal összevetve ebből az következik, hogy $h_i\in A_k$ esetén $y_{i,k}$ pozitív, $h_i\notin A_k$ esetén pedig negatív.

Legyen most $j\neq i$, de egyébként $i,j\le n$ tetszőleges. Ekkor (6) és (7) alapján

$$0=\underline{e}_j^{\mathrm{T}}\cdot\underline{e_i}=\underline{e}_j^{\mathrm{T}}\cdot\sum_{k=1}^{n}y_{i,k}\underline{a}_k=\sum_{k=1}^{n}y_{i,k}\underline{e}_j^{\mathrm{T}}\cdot\underline{a}_k=\sum_{k=1}^{n}y_{i,k}\delta_{j,A_k}=\sum_{k:\ h_j\in A_k}y_{i,k}\,.$$

Egy nulla értékű (és – mivel a halmazrendszer lefedi H-t – nem üres) összeget kaptunk, amelyben egyik tag sem nulla; így lennie kell a tagok között pozitívnak. Ha $y_{i,k}$ egy ilyen tag, akkor a következő két dolgot tudjuk róla: 1. $h_i\in A_k$, hiszen $y_{i,k}$ pozitív; 2. $h_j\in A_k$, mivel a tag a fenti összegből való.

Kiderült tehát, hogy – maximális elemszámának köszönhetően – a halmazrendszer azzal a további tulajdonsággal is rendelkezik, hogy a H bármely két eleme egyszerre benne van az n darab részhalmaz valamelyikében. Megjegyzendő, hogy a két megadott példánk közül a másodikra ez teljesül. Megmutatható viszont, hogy $n\ge 4$ esetén minden ettől különböző konfiguráció nagyon szigorú számossági feltételeknek tesz eleget: mindegyik A_i részhalmaz ugyanannyi elemből áll (legyen ez a szám $q+1$), a H minden eleme pontosan $q+1$ részhalmazban van benne, és ezekből következően $n=q^2+q+1$. Ezeket a konfigurációkat *véges projektív síkoknak* nevezzük. Az elnevezés nem véletlen: ha H elemeit tekintjük pontoknak, az A_i részhalmazokat pedig egyeneseknek, akkor valóban teljesülnek a projektív síkgeometria axiómái, miszerint bármely két különböző egyenesnek pontosan egy közös pontja van, és bármely két ponthoz található (előbbi szerint pontosan egy) olyan egyenes, amely mindkét pontot tartalmazza. Ha q prímhatvány, akkor egy $n=q^2+q+1$ elemű halmazon létezik véges projektív sík (olykor többféle is!). Híres, és mindmáig megoldatlan probléma viszont, hogy létezik-e olyan k szám, ami nem prímhatvány, de az $n=k^2+k+1$ elemű halmazon mégis megadható projektív sík.

Az egymást egy pontban metsző halmazok rendszeréről szóló ún. Erdős – de Bruijn-tételt tehát a következőképpen fogalmazhatjuk meg: *Ha egy $n\ge 4$ elemű halmaz k darab részhalmaza közül bármelyik kettőnek pontosan egy közös eleme van, akkor $k\le n$, és ha $k=n$, akkor a rendszer vagy az ismertetett két példa egyike, vagy egy véges projektív sík.*

Befejezés

Mátrixok sajátvektorai és sajátértékei a matematika és a fizika számos területén előfordulnak. Befejezésül essék néhány szó ismét a koordináta-geometriáról. Tekintsük például azt a síkgörbét, amelynek (a szokásos derékszögű koordináta-rendszerben) az egyenlete

$$6x^2+4xy+3y^2+5x-8y-10=0.$$

Mi ez a görbe, mik a főbb geometriai jellemzői? Könnyebb lenne erre választ adni, ha egy másik, az alakzathoz „jobban illeszkedő" koordináta-rendszerben lenne az egyenlet felírva. Csakhogy éppen ez a feladat: az adekvát koordináták megtalálása. Ha a koordináta-rendszert eltoljuk a $\underline{v}=(a,b)$ vektorral, akkor az új x', y' koordinátákkal $x=x'+a$, $y=y'+b$ teljesül; ezeket az eredeti egyenlet változóiba helyettesítve egy kis számolás után megkaphatjuk az alakzatunk egyenletét az új rendszerben. De a részletek kiszámolása nélkül is látható, hogy az új egyenletben ugyanazok maradnak a másodfokú tagok (x^2, xy, y^2) együtthatói. A probléma kemény magja tehát ezekben keresendő – az elsőfokú tagokat és a -10 konstanst hagyjuk is egyelőre figyelmen kívül.

A megoldás kulcsa az, hogy a $6x^2+4xy+3y^2$ részt mátrixokkal,

(9) $$(x\ y)\begin{pmatrix}6&4\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

alakban írjuk fel. Ha a koordináta-rendszert az origó körül β fokkal elforgatjuk, az új x', y' koordinátákra

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},\quad\text{illetve}\quad(x\ y)=\begin{pmatrix}\cos\beta&\sin\beta\\-\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}(x'\ y').$$

Így az elforgatott koordináta-rendszerben az alakzat új egyenletének másodfokú része:

$$(x'\ y')\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}.$$

A megjelölt háromtényezős mátrixszorzat adja az új egyenletben a másodfokú tagok együtthatóit. Jó lenne, ha ott az $x'y'$ együtthatója nulla lenne, mert akkor – a koordináta-rendszer alkalmas eltolása után – könnyű lenne észrevenni, hogy pl. ellipszissel, hiperbolával vagy parabolával van-e dolgunk. Ez éppen azt jelentené, hogy az aláhúzott mátrix diagonális. Itt felcsillan a remény: a bal szélen álló mátrix éppen a jobb oldalinak az inverze! Célba érhetünk tehát, ha az eredeti $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ mátrix diagonalizálható. Egyszerű és már ismert számolással ellenőrizhető is, hogy ez a mátrix valóban diagonalizálható. Ám ne örüljünk korán: a diagonalizálhatóság önmagában itt nem elegendő, a követelmény az, hogy alkalmas $\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ típusú mátrixszal lehessen diagonalizálni – ilyen pedig a mi mátrixunkhoz nem létezik.

Azonban szerencsénk van: lehet más is a kiindulási mátrix! Vegyük észre ugyanis, hogy (9)-ben az xy együtthatója a $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ mátrix jobb felső és bal alsó elemének összegeként adódik – így ezek egyikét szabadon megválaszthatjuk. Válasszuk őket egyenlőnek, ekkor az $\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ mátrix a bal felső és a jobb alsó sarok meghatározta egyenesre szimmetrikus. A lineáris algebra egy alapvető tétele – az ún. főtengelytétel – szerint minden szimmetrikus $n\times n$-es mátrix egy alkalmas *ortogonális mátrixszal* diagonalizálható; 2×2-es esetben ez éppen a kívánt alakot jelenti.

Esetünkben a megfelelő diagonalizáló mátrix $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$, és az új x', y' koordinátákkal felírt

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},$$

azaz $x=\frac{1}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'$, $y=-\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'$ helyettesítésekkel kapott új egyenlet (az elforgatott koordináta-rendszerben):

$$2x'^2+7y'^2+\frac{21}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'-10=0.$$

Innen már simább úton haladhatunk tovább; teljes négyzetté kiegészítéssel eltüntethetjük az elsőfokú tagokat:

$$2\left(x'+\frac{21}{4\sqrt5}\right)^2+7\left(y'+\frac{1}{7\sqrt5}\right)^2=10+\frac{441}{80}+\frac{1}{245},$$

ennek megfelelően eltolhatjuk a koordináta-rendszert, végül osztunk az újonnan adódó konstans tag abszolút értékével. Az egyenlet fenti alakjából egyébként már leolvasható, hogy – 2 és 7 pozitív lévén – görbénk egy ellipszis. A szokásos $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alakba való átírással megkaphatjuk az ellipszis tengelyeinek hosszát, a diagonalizáló mátrix révén pedig (ld. $\arcsin\frac{2}{\sqrt5}$ és társai) e tengelyeknek az eredeti koordináta-rendszer tengelyeivel bezárt szögét.