I. rész

1. *a*) *Van-e megoldása a következő egyenletnek a pozitív egész számok halmazán?*

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = 2y.$$

b) *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}.$$

Megoldás. *a*) A feladat feltételéből következően x és y csak pozitív egész lehet. $1! = 1$, $n \geq 2$ esetén $n!$ páros, mert tartalmazza a 2-t szorzótényezőként. A bal oldali összeg tehát páratlan, a jobb oldal értéke viszont páros, az egyenletnek nincs megoldása.

b) A nevezőben nem lehet 0, vagyis $\cos\alpha \neq 0$. Mindkét oldalt $\cos\alpha$-val szorozva és 2-vel osztva az $\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alakhoz jutunk. Felhasználva, hogy $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ és $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a $\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alak adódik, amit az addíciós tétel felhasználásával a $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alakra hozhatunk.

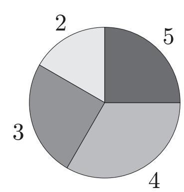
A megoldások: $\alpha_1 = -\frac{\pi}{12} + 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 = \frac{5\pi}{12} + 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

2. *Sanyi félévi bizonyítványát mutatja a* táblázat.

magyar irodalom	5 (jeles)
magyar nyelv	4 (jó)
történelem	4 (jó)
matematika	3 (közepes)
angol nyelv	4 (jó)
német nyelv	3 (közepes)
fizika	2 (elégséges)
kémia	3 (közepes)
biológia	2 (elégséges)
rajz	4 (jó)
ének-zene	5 (jeles)
testnevelés	5 (jeles)

a) *Adjuk meg Sanyi jegyeinek móduszát, mediánját és terjedelmét.*
b) *Számítsuk ki Sanyi tanulmányi átlagát (a jegyek számtani közepét).*
c) *Adjuk meg az érdemjegyek szórását.*
d) *Ábrázoljuk a jegyek százalékos eloszlását kördiagramon.*

Megoldás. *a*) módusz: 4, medián: 4, terjedelem: 3.
b) átlag: 3,667.
c) szórás: 1,027.
d) a jegyek 25%-a 5-ös,
33,33%-a 4-es,
25%-a 3-as,
16,67%-a 2-es.



A jegyek eloszlása

3. *Melyek azok az x pozitív egész számok, amelyekre igaz, hogy $x^4 + 4$ prímszám?*

Megoldás. x^4+4 egész együtthatós polinomok szorzatává alakítható:

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=$$
$$=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

Mivel x pozitív egész, a tényezők egészek és $0<x^2-2x+2<x^2+2x+2$. A szorzat csak úgy lehet prím, ha a kisebbik tényező értéke 1, a nagyobbik pedig prím. Ha $x^2-2x+2=1$, akkor $x=1$. Ebben az esetben a kifejezés értéke 5, valóban prím.

Csak $x=1$ esetén lesz x^4+4 $(=5)$ prímszám.

4. *Egy mértani sorozat első és harmadik elemének az összege* 40. *Ha az első elemhez* 4-*et, a második elemhez pedig* 6-*ot adunk, akkor a harmadik elemmel együtt ugyanilyen sorrendben egy számtani sorozat három szomszédos eleméhez jutunk. Melyik ez a mértani sorozat?*

Megoldás. A szokott módon jelöljük a mértani sorozat elemeit: a_1, a_1q, a_1q^2, a számtani sorozat három szomszédos eleme ekkor az a_1+4, a_1q+6, a_1q^2 alakot ölti.

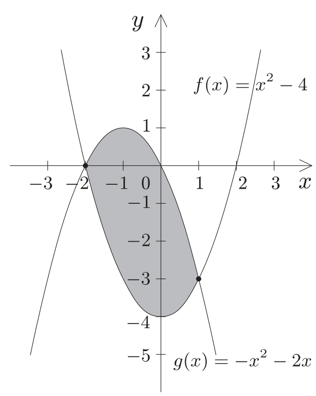
Az $a_1+a_1q^2=40$ egyenlet mellett felírható az $(a_1q+6)-(a_1+4)=a_1q^2-(a_1q+6)$ egyenlet is. Az így kapott egyenletrendszer mindkét egyenletéből kifejezzük az a_1-et $(q\neq 1)$, ekkor kapjuk: $\dfrac{5}{1+q^2}=\dfrac{1}{(q-1)^2}$.

Ebből két megoldást kapunk: $q=2$, $a_1=8$, valamint $q=0{,}5$, $a_1=32$. Mindkettő megoldása a feladatnak.

II. rész

5. *Milyen arányban osztja az* y *tengely az* $f(x)=x^2-4$ *és a* $g(x)=-x^2-2x$ *függvények görbéi által határolt területet?*

Megoldás. A két függvény metszéspontjainak abszcisszái: $x_1=-2$, $x_2=1$.



A $(-2;1)$ intervallumban a két függvény különbsége állandó előjelű, így a szóban forgó területek aránya

$$\lambda=\frac{\int_{-2}^{0} f(x)-g(x)\,dx}{\int_{0}^{1} f(x)-g(x)\,dx},$$

$$\int f(x)-g(x)\,dx=\int 2x^2+2x-4\,dx=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x+c.$$

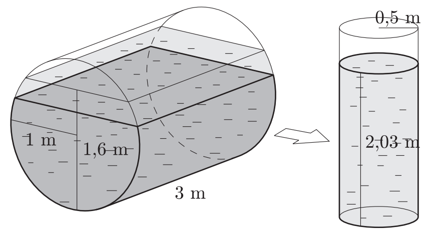
Belyettesítve:

$$\left[\frac{2}{3}x^3+x^2-4x\right]_{-2}^{0}=-\frac{20}{3}\quad\text{és}\quad\left[\frac{2}{3}x^3+x^2-4x\right]_{0}^{1}=-\frac{7}{3}.$$

(Innen az is látszik, hogy a $(-2;1)$ intervallumon $f(x)<g(x)$.) A területek aránya tehát

$$\lambda=\left(-\frac{20}{3}\right):\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{20}{7}.$$

6. *Egy henger alakú fekvő tartály alapkörének a sugara* 1 m, *a henger alkotója* 3 m. *A tartályban a víz magassága jelenleg* 1,6 m. *A víz egy részét kiengedjük egy elegendően nagy térfogatú, álló henger alakú edénybe. Az edény alapkörének sugara* 0,5 m. *Milyen magas lesz ebben az edényben a vízszint, ha a fekvő hengerben* 0,3 m-*t süllyedt a víz magassága?*



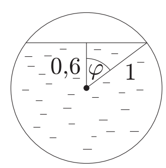
Megoldás. Számoljuk ki a fekvő henger kezdeti víztartalmát:

$$\cos\varphi = \frac{0{,}6}{1}, \qquad \varphi \approx 53{,}13^\circ.$$

$$T_{\text{körszelet}} = \frac{2\varphi}{360^\circ}\cdot r^2\pi - \frac{1}{2}r^2\cdot\sin 2\varphi \approx 0{,}9273 - 0{,}4800 = 0{,}4473\ \text{m}^2.$$

$$T_1 = r^2\pi - T_{\text{körszelet}} \approx 3{,}1416 - 0{,}4473 = 2{,}6943\ \text{m}^2.$$

$$V_1 = T_1 d \approx 8{,}083\ \text{m}^3.$$



A fekvő hengerben maradt víz térfogatának kiszámítása:

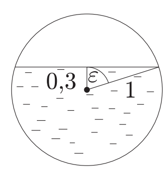
$$\cos\varepsilon = \frac{0{,}3}{1}, \qquad \varepsilon \approx 72{,}54^\circ.$$

$$T_{\text{körszelet}_2} = \frac{2\varepsilon}{360}\cdot r^2\pi - \frac{1}{2}r^2\cdot\sin 2\varepsilon \approx 1{,}2661 - 0{,}2862 = 0{,}9799\ \text{m}^2.$$

$$T_2 = r^2\pi - T_{\text{körszelet}_2} \approx 3{,}1416 - 0{,}9799 \approx 2{,}1617\ \text{m}^2.$$

$$V_2 = T_2 d \approx 6{,}4851\ \text{m}^3.$$

A fekvő hengerből kifolyt víz térfogata: $V \approx 1{,}5978\ \text{m}^3$.



Az álló hengerben a vízmagasság kiszámítása:

$$V_{\text{henger}} = r^2\pi\cdot m, \quad \text{vagyis} \quad 1{,}598 \approx 0{,}25\cdot 3{,}14\cdot m,$$

amiből $m \approx 2{,}03$ m.

Tehát körülbelül 2 méter magasan áll majd a víz a második hengerben.

7. *Egy üzem azt a megrendelést kapta, hogy készítsen el* 100 db 1 dm^3 *térfogatú felül nyitott kúp alakú fagylalttölcsért. Az alapanyag drága, a megrendelő pedig csak a kúp térfogatát írta elő. Milyen nyílásszögű kúp esetén lesz minimális az anyagköltség?*

Megoldás. A kúp térfogata: $\dfrac{r^2\pi\cdot m}{3} = 1000\ \text{cm}^3$. A kúp alkotója a sugárral és a magassággal kifejezve: $a = \sqrt{r^2+m^2}$. A kúppalást felszíne: $A_{\text{palást}} = r\cdot\pi\cdot a$.

Kell, hogy

$$A = r\pi\sqrt{r^2 + \left(\frac{3000}{r^2\pi}\right)^2} = \pi\sqrt{r^4 + \frac{9\,000\,000}{r^2\pi^2}}$$

minimális legyen. Elég megkeresni az $r^4 + \dfrac{9\,000\,000}{r^2\pi^2}$ kifejezés minimumát. A deriváltat egyenlővé téve 0-val:

$$\left[r^4 + \frac{9\,000\,000}{r^2\pi^2}\right]' = 4r^3 + \frac{-2r\pi^2 \cdot 9\,000\,000}{r^4\pi^4} = 0,$$

ahonnan $4r^3 = \dfrac{2\pi^2 \cdot 9\,000\,000}{r^3\pi^4}$, vagyis $r^6 = \dfrac{18\,000\,000}{4\pi^2} \approx 455\,945{,}33$. $r \approx 8{,}773$ cm adódik.

A második deriváltat vizsgálva az $r = 8{,}773$ helyen:

$$\left[4r^3 - \frac{2r\pi^2 \cdot 9\,000\,000}{r^4\pi^4}\right]' = \left[4r^3 - \frac{18\,000\,000}{r^3\pi^2}\right]' = 12r^2 - \frac{-18\,000\,000 \cdot 3r^2\pi^2}{r^6\pi^4} > 0.$$

A palást felszíne minimális, ha $r \approx 8{,}773$ cm. Ekkor $m \approx 12{,}407$ cm, $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{r}{m}$, ahonnan a keresett nyílásszög $\varphi \approx 70{,}53°$.

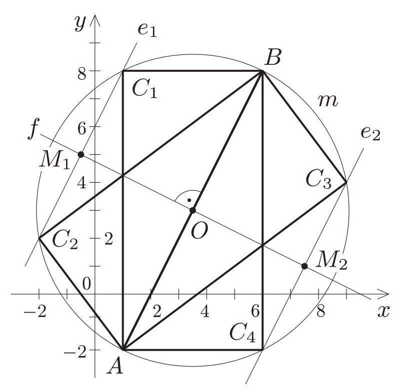
8. *Hol lehet annak a derékszögű háromszögnek a derékszögű csúcsa, melynek területe 25 egység, és az átfogójának a két végpontja $A(1;-2)$ és $B(6;8)$?*

Megoldás. Az ilyen derékszögű háromszög harmadik csúcsa az AB szakasz Thalész-körének és az AB egyenesétől $2\sqrt{5}$ egységre haladó, AB-vel párhuzamos e_1 és e_2 egyeneseknek a metszéspontja lesz.

Ugyanis az AB szakasz hossza: $d_{AB} = \sqrt{(6-1)^2 + \big(8-(-2)\big)^2} = \sqrt{125}$. A háromszög területe: $T = d_{AB} \cdot m \cdot \dfrac{1}{2}$. Ezekből adódik, hogy $2\sqrt{5} = m$.

A Thalész-kör egyenlete: $(x-3{,}5)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{125}{4}$.

Az e_1 és e_2 egyenesek egy irányvektora: $\overrightarrow{AB}(5;10)$. Egy normálvektoruk: $\mathbf{n}_{e_1} = \mathbf{n}_{e_2}(-10;5)$. Állítsunk az AB-re O-ban egy f merőleges egyenest. Az f egyenes egyenlete: $x + 2y = 9{,}5$. Ezt elmetszve az O középpontú m sugarú körrel, melynek egyenlete $(x-3{,}5)^2 + (y-3)^2 = 20$, e_1, illetve e_2 egy-egy pontját kapjuk: $M_1(-0{,}5;5)$, $M_2(7{,}5;1)$.



e_1 egyenlete: $-2x + y = 6$, e_2 egyenlete: $-2x + y = -14$. A feladatnak négy megoldása van: e_1 és a Thalész-kör metszéspontjai: $C_1(1;8)$, $C_2(-2;2)$; e_2 és a Thalész-kör metszéspontjai: $C_3(9;4)$, $C_4(6;-2)$.

9. *a*) *Van-e egy 25 fős társaságban 3 olyan ember, akik ugyanabban a hónapban születtettek? Indokoljuk a választ.*

b) *Az egyjegyű pozitív egész számok halmazából kiválasztunk egy tetszőleges részhalmazt. Mi a valószínűsége, hogy ebben az 1 vagy a 2 benne van?*

c) *Az egyjegyű pozitív egész számok halmazából maximum hány olyan részhalmazt tudunk kiválasztani, amelyek közül bármely kettőnek van közös eleme?*

Megoldás. *a*) A skatulya-elv szerint lesz legalább 1 olyan hónap, amikor legalább három ember született, hiszen $2 \cdot 12 = 24 < 25$. Az e hónapban születettek közül bármely három megfelelő.

b) A halmaz elemei: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ez egy kilencelemű halmaz, tehát az összes részhalmazainak száma 2^9. Azon részhalmazok száma, melyekben sem az 1, sem a 2 nem szerepel 2^7. A keresett valószínűség: $P = 1 - \dfrac{2^7}{2^9} = \dfrac{3}{4}$.

c) Válasz: 2^8. Az olyan részhalmazok száma, amelyekben pl. az 1 benne van, 2^8, tehát 2^8 db a feltételeknek megfelelő részhalmazt biztosan ki tudunk választani. Minden egyes részhalmaz kiválasztásakor egyúttal a komplementerét is „kiválasztjuk", vagyis mondhatjuk, hogy a részhalmazok halmaza részhalmaz és komplementer részhalmaz típusú párokba rendezhető. Mivel a párok száma az összes részhalmazok számának a fele, 2^8, azért ennél több részhalmaz között már van ilyen – részhalmaz és komplementer részhalmaz – páros. Ezeknek nincs közös elemük, tehát $2^8 + 1$ db a feltételeknek megfelelő részhalmaz nem választható ki.