

I. rész

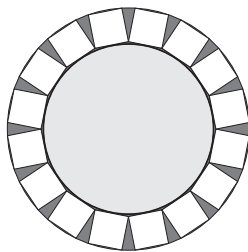
1. Két konvex sokszög belső szögösszegének különbsége megegyezik egy hétszög belső szögösszegével, és egyiküknek kétszer annyi csúcsa van, mint ahány oldala a másiknak. Hány átlójuk van összesen?

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív egész számpárok halmazán:

$$\begin{aligned}x^{y^2-15y+56} &= 1, \\ y - x &= 5.\end{aligned}$$

3. A $k^2(2+4x) - x(x+1+k) + 3(x-2)(2k+1) - (1-x)(k+3) = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$. Adjuk meg k értékét.

4. Egy teázóban úgy szolgálják fel a teát, hogy a csésze 16 db kockacukorral az *ábrán* látható módon körberakható (a szomszédos kockacukrok csúcsai összeérnek, egy-egy oldalukkal érintik a csészét, két-két csúcsuk pedig a csészealj peremén van). Hány cm a kockacukor éle, illetve a csésze sugara, ha a csészealj átmérője 10 cm?



II. rész

5. Hány megoldása van az $\left| \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right| = \frac{kx}{7}$ egyenletnek a pozitív egész k értéktől függően?

6. Adott a 10 egység oldalú $ABCD$ rombusz. Az A középpontú, C csúcson áthaladó kört belülről érinti a B középpontú, D csúcson áthaladó kör. Határozzuk meg a rombusz területét.

7. Az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör, az $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$ egyenletű parabola és az abszcisszatengely egy síkidomot határoznak meg, amelyet megforgatunk az abszcisszatengely körül. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

8. Egy cég golyó alakú, tömör rágógumit gyártott, és darabját 10 forintért adta el. Az alapanyagok drágulása miatt az előállítási költség 300%-kal növekedett. A gyártó szeretné, ha a rágógumik eladása utáni nyereség és az előállítási költség aránya nem változna, ezért a rágógumi darabárát 20 forintra emelte. A terméket is átalakították: a 2 cm átmérőjű gömb alakú rágógumik belseje egy koncentrikus gömb alakú üreget is tartalmaz. Számoljuk ki az új rágógumi falának vastagságát.

9. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

a)
$$\begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{x-5} - 1 = 7x - x^2 - 2xy, \\ \log_5 64^x \cdot \log_4 125^y = 45. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} xy + y = 2, \\ (1-y) \cdot 2 \cos \frac{x \cdot \pi}{3} = \frac{x-1}{x+1}. \end{cases}$$