A logaritmikus középre vonatkozó egyenlőtlenségekről

Előző számunkban megjelent közös cikkükben[1] *Kovács Veronika* és *Petz Dénes* ismertették két pozitív szám *logaritmikus közepének* a definícióját:

Az x és y pozitív számok logaritmikus közepe:

$$L(x;y) := \begin{cases} \dfrac{x-y}{\ln x - \ln y} & \text{ha } x \neq y, \\ x & \text{ha } x = y. \end{cases} \tag{1}$$

Ez a képlet jóval bonyolultabb, mint a számtani, vagy a mértani közép képlete. Az sem látszik azonnal, hogy $L(x;y)$ egy pozitív szám, még kevésbé az, hogy x és y közé esik. Mindezek a tulajdonságok következnek az alábbi tételből:

$$G(x;y) \leq L(x;y) \leq A(x;y)$$

minden pozitív x és y számra.

A cikkben közölt bizonyítások egy igen hatékony technika iskolapéldái: a bizonyítandó egyenőtlenségeket alkalmas új változó bevezetésével egyváltozóssá alakítva azt kell igazolni, hogy egy adott függvény – a két oldal különbsége – egy intervallumon pozitív. Ellenőrizve, hogy az intervallum bal oldali végpontjában fennáll az egyenlőtlenség – a példákban éppenséggel az egyenlőség teljesült, de ez is elég – elegendő bebizonyítani, hogy a függvény növő, vagyis a deriváltja pozitív.

Az alábbiakban mutatunk egy másik bizonyítást. Ehhez először bevezetünk egy új, általánosabb közepet és kimondunk egy erre vonatkozó eredményt, amelynek mindkét egyenlőtlenség azonnali következménye. Ez az általánosabb közép egyúttal a látszólag önkényesen értelmezett logaritmikus közép egy lehetséges származtatására is rámutat.

Az integrálközép

Legyen az f függvény az $[a;b]$ intevallumon integrálható. Ekkor szokás az f függvény „átlagos értékéről” beszélni az $[a;b]$ intevallumon, a fizikusok például így értelmezik az *effektív áramerősséget.* Ezt az átlagos függvényértéket az

$$\overline{y}(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

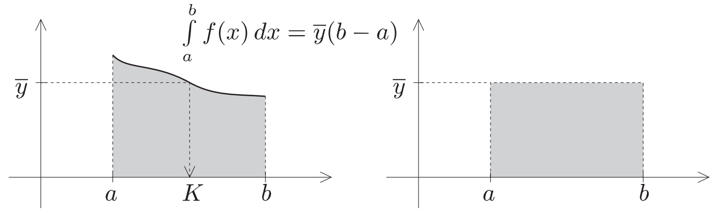
egyenlőséggel értelmezzük, tehát ha I-vel jelöljük az f függvény integrálját az $[a;b]$ intevallumon, akkor:

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \frac{I}{b-a}.$$

Tegyük fel még, hogy az f függvény folytonos és kölcsönösen egyértelmű az $[a;b]$ intevallumon. A folytonosság persze biztosítja az integrálhatóságot és minden feltétel teljesül például a szigorúan monoton folytonos függvényekre. Hívjuk ezek után az a, b számok f-integrálközepének a

$$K_f(a;b) = f^{-1}(\overline{y}) = f^{-1}\left(\frac{I}{b-a}\right)$$

mennyiséget (*1. ábra*).



1. ábra

[1] Kovács Veronika – Petz Dénes: *Számtani közép, mértani közép meg ilyenek,* KöMaL 2006/3. sz., 130–136. oldal.

Ez a definíció értelmes, hiszen a folytonosság és a határozott integrálra vonatkozó elemi becslések szerint az $[a;b]$-beli „átlagos függvényérték", $\overline{y}$ benne van a függvény értékkészletében. Az is nyilvánvaló, hogy $a < K_f(a;b) < b$, valóban „középpel" van dolgunk. Mivel pedig az f függvény folytonos, a *Newton–Leibniz-tétel* szerint

$$K_f(b;b) = \lim_{a \to b} K_f(a;b) = b.$$

A definícióban a függvény inverzét alkalmazzuk $\overline{y}$-ra: ez természetes lépés és valamiképpen annak a folytonos változata, ahogyan például a mértani középben a szorzatból négyzetgyököt, az n-edik hatványközép képzésekor pedig az n-edik hatványok átlagából n-edik gyököt kell vonnunk ahhoz, hogy az adott számokkal azonos dimenziójú mennyiséget kapjunk.

Könnyű ellenőrizni, hogy ha $f(x) = x$, akkor az a és b számok integrálközepe éppen a számtani közepük, a logaritmikus közepet pedig az $f(x) = x^{-1}$ választással kapjuk:

$$K_{x^{-1}}(a;b) = L(a;b).$$

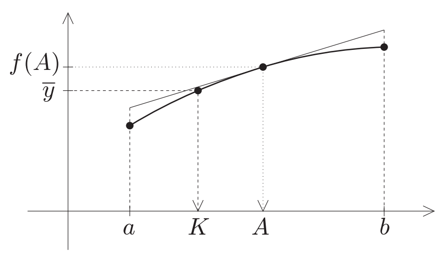
Az integrálközép egyik fontos tulajdonsága, hogy az f függvényre vonatkozó természetes feltételek teljesülésekor összehasonlítható az a és b számok számtani közepével. Ezt mondja ki az alábbi

Tétel. *Ha f pozitív,* növő és konkáv *vagy* fogyó és konvex, *akkor*

$$K_f(a;b) \le A(a;b).$$

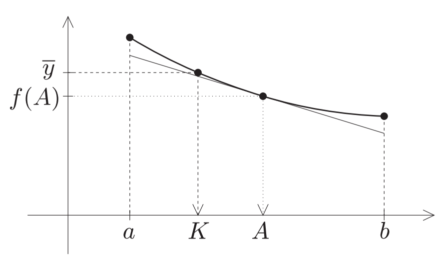
(Ugyanígy ha f növő és konvex *vagy* fogyó és konkáv, *akkor a fenti egyenlőtlenség fordítva teljesül: $A(a;b) \le K_f(a;b)$.)*

A bizonyítások leolvashatók az *ábrákról:* annak a derékszögű trapéznak a T területe, amelynek a szára az $\big(A; f(A)\big)$ pontban húzott érintő, $T = f(A) \cdot (b-a)$. Ez a terület pedig éppen az f – és f^{-1} – monotonitásának megfelelő irányból becsüli az integrált.



$$\overline{y}(b-a) = I < T = f(A) \cdot (b-a)$$
$$\Big\Downarrow \ f \text{ növő}$$
$$K = f^{-1}(\overline{y}) < f^{-1}\big(f(A)\big) = A$$

2. ábra



$$\overline{y}(b-a) = I > T = f(A) \cdot (b-a)$$
$$\Big\Downarrow \ f \text{ fogyó}$$
$$K = f^{-1}(\overline{y}) < f^{-1}\big(f(A)\big) = A$$

3. ábra

A $G(a;b) \le L(a;b) \le A(a;b)$ egyenlőtlenségek bizonyítása

$L(a;b) \le \dfrac{a+b}{2}$ egyetlen hivatkozás: $f(x) = x^{-1}$ fogyó és konvex, ha $x > 0$.

A $\sqrt{ab} \le L(a;b)$ egyenlőtlenséghez legyen $f(x) = e^x$. Ez a függvény növő és konvex, tehát

$$\frac{u+v}{2} \le K_f(u;v) = \ln \frac{e^u - e^v}{u - v},$$

ahonnan $u = \ln a$ és $v = \ln b$ választással kapjuk a bizonyítandó állítást.