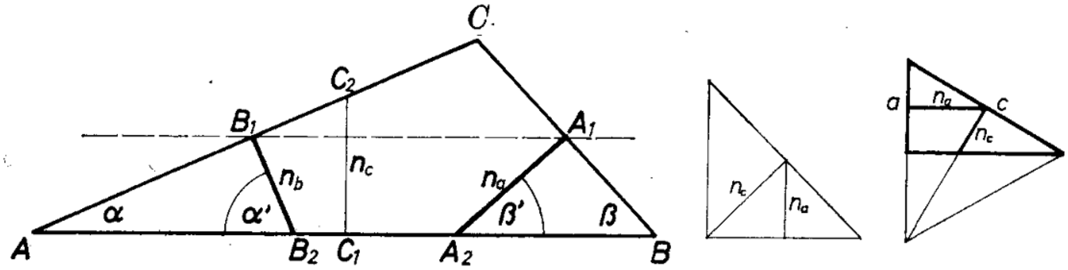
I. megoldás. 1. A szokás szerint megbetűzött ABC háromszögben az n_a szakasz a $BC = a$ oldal A_1 felezőpontjából indul, A_2 végpontja pedig az A-ból B-be vivő oldalon van, mert $c > b$, azaz $AB > AC$ miatt B van a felező merőlegesnek A-val ellentétes oldalán. Hasonlóan AB-n van $n_b = B_1B_2$ végpontja. Így n_a is, n_b is az A_1B_1 és AB párhuzamos egyenesek egy-egy pontját köti össze. Az egyenespárral alkotott β', ill. α' hajlásszögeikre (1. ábra)

$$\beta' = 90^\circ - \beta < 90^\circ - \alpha = \alpha'$$

– ugyanis az adott nagyságviszony alapján a $\alpha < \beta < \gamma$, és így $\beta < 90^\circ$–, ezért valóban a laposabban hajló A_1A_2 nagyobb B_1B_2-nél.



A második állítás a C_1C_2A és B_1B_2A háromszögek hasonlóságából következik, ugyanis az előzőkhöz hasonló meggondolás szerint C_2 az AC oldalon van; $AC_1 = c/2 > b/2 = AB_1$ miatt a megfelelő másik befogókra $C_1C_2 > B_1B_2$.

2. Az n_a és n_c szakaszok nagyságviszonyáról csak azt mondhatjuk, hogy mindhárom lehetőség fennáll. Elég ennek igazolására számpéldákat (ill. példatípusokat) mutatnunk. Speciálisan derékszögű háromszögeket választunk, ezekben $c = 1$ megválasztással $n_c = a/2b$ és $n_a = b/2$. Köztük egyenlőség áll, ha $b_0^2 = a_0$, amikor a Pitagorasz-tétel alapján $a_0^2 + a_0 = 1$, ennek az egyenletnek a pozitív gyöke

$$\sin\alpha_0 = a_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618,$$

és ekkor $\alpha_0 < 45^\circ < \beta_0$, mert mint könnyen megmutatható,

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ.$$

Ha most $\alpha > \alpha_0$, de még $\alpha < 45^\circ$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > a > a_0 \quad \text{és} \quad b_0 = \cos\alpha_0 > \cos\alpha = b > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ezért

$$b^2 < b_0^2 = a_0 < a$$

és

$$n_c = \frac{a}{2b} > \frac{a_0}{2b} > \frac{a_0}{2b_0} = n_{c0} = n_{a0} = \frac{b_0}{2} > \frac{b}{2} = n_a.$$

(A föltevésünk érvényességét határoló $a = b$ esetben $n_c = \sqrt{2}n_a$.)

Ha viszont $\alpha < \alpha_0$, speciálisan $\alpha = 30^\circ$ mellett n_a fele akkora, mint az 1 oldalú szabályos háromszög magassága, n_c viszont harmada annak. Ekkor valóban $\alpha < \alpha_0$, mert $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. – Mindhárom nagyságviszony esetére példát adtunk, állításunkat igazoltuk.

II. megoldás. A háromszög bármelyik oldalát kiválasztva, annak oldalfelező merőlegese a másik két oldal közül mindig a hosszabbat metszi, mert a szemben fekvő csúcs azon a félsíkon van, amelyiken az oda vivő rövidebbik oldal. Így az n_a és n_b szakaszokat a c oldal, az n_c-t pedig a b oldal fogja határolni. Kifejezhetők tehát a szakaszok az oldalak és a szögek segítségével a következőképpen:

$$n_a = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}, \qquad n_b = \frac{b\operatorname{tg}\alpha}{2}, \quad n_c = \frac{c\operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

Felhasználjuk még, hogy $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$. Ezekkel a szakaszok páronkénti arányai

$$\frac{n_a}{n_b} = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{b\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{b\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} > 1,$$

mert a föltevés szerint $\alpha < \beta (< \gamma)$ mindkettő hegyesszög; másrészt

$$\frac{n_c}{n_b} = \frac{c \operatorname{tg} \alpha}{b \operatorname{tg} \alpha} = \frac{c}{b} > 1.$$

Ezzel az állítás két egyenlőtlenségét beláttuk.

Végül a kérdéses nagyságviszony vizsgálata céljára a $2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ azonosság alapján így alakíthatjuk a két szakasz arányát:

$$\frac{n_c}{n_a} = \frac{\sin\gamma \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\gamma\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} =$$
$$= \frac{\sin(\gamma+\beta)+\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\beta+\alpha)+\sin(\beta-\alpha)} = \frac{\sin\alpha+\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)+\sin\gamma}.$$

A számláló és a nevező tagjai pozitívok. Elérhető, hogy ugyanaz a nagyságviszony álljon fönn elöl álló tagjaik közt, mint másodiknak írt tagjaik közt, és ekkor ugyanez teljesül n_c és n_a közt is. Mármost

$$\sin(\gamma-\beta) > \sin\gamma \quad \text{és} \quad \sin\alpha > \sin(\beta-\alpha)$$

egyidejű teljesüléséhez elegendő, ha $\gamma > 135^\circ$ és $\alpha > \beta - \alpha$, vagyis $2\alpha > \beta > \alpha$, az ellentétes nagyságviszony pedig mindig beáll, ha $2\alpha < \beta < \gamma < 90^\circ$. Könnyen találhatók e feltételeknek eleget tevő α, β, γ értékhármasok.

Ezek után azt már fölösleges keresnünk, beállhat-e $n_a = n_c$.